Simulare, Bacalaureat, 11 mai 2023
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Calculaţi a_{2023}, ştiind că $(a_n)_{n\geq 1}$ este progresie aritmetică cu $a_1 = 2023$ şi $r = -1$.

5p **2.** Arătaţi că $x_1 + x_2 + 2x_1x_2 = 23$, ştiind că x_1 şi x_2 sunt soluţiile ecuaţiei $x^2 - 3x + 10 = 0$.

5p **3.** Determinaţi coordonatele punctelor de intersecţie a graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = 2^{x+1} - 1$ cu axele Ox şi respectiv Oy.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând una dintre submulţimile cu 2 elemente ale mulţimii $\{1,2,3,...,9\}$, aceasta să fie formată doar din numere prime.

5p **5.** Calculaţi $\vec{a}\cdot\vec{b}$, ştiind că $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$ şi unghiul vectorilor $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ are măsura $\frac{\pi}{3}$.

5p **6.** Arătaţi că $2\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,x + 1 = 0$, ştiind că $\sin x = \frac{1}{3}$ şi $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Calculaţi $\det(A(2))$.

5p **b)** Determinaţi numărul real x pentru care $A(x)\cdot A(-x) = I_2$, unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p **c)** Arătaţi că $\det(A(1) + A(2) + ... + A(n)) = \frac{n^2(n-1)(n+3)}{4}$, pentru orice număr natural nenul n.

2. Se consideră polinomul $f = X^3 + (m-3)X^2 - 17X + (2m+7)$, cu $m\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Determinaţi $m\in\mathbb{R}$ pentru care polinomul f este divizibil cu $X - 1$.

5p **b)** Pentru $m = 4$ arătaţi că $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -62$, unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $27^x + 9^x - 17\cdot 3^x + 15 = 0$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 5} - x - 2$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+5}} - 1,\ x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Demonstraţi că axa Ox este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

5p **c)** Demonstraţi că imaginea funcţiei f este intervalul $(0, +\infty)$.

2. Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x+\frac{1}{x+1}$.

5p **a)** Calculați $\int_0^1\left(f(x)-\frac{1}{x+1}\right)dx$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^1 xf(x)dx=\frac{4}{3}-\ln 2$.

5p **c)** Determinați numărul natural nenul n, știind că suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$ are aria egală cu $\frac{1}{2}+\ln\left(n^2+n\right)$.

Simulare, Bacalaureat, 11 mai 2023
Proba E. c)

Matematică *M_șt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total obţinut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a_{2023}=2023+2022\cdot(-1)=$ $=1$	**3p** **2p**
2.	$x_1+x_2=3, x_1x_2=10$ $x_1+x_2+2x_1x_2=3+2\cdot 10=23$	**3p** **2p**
3.	$G_f\cap Ox: f(x)=0\Rightarrow x=-1$ $A(-1,0)$ $G_f\cap Oy: f(0)=1$ $B(0,1)$	**2p** **1p** **1p** **1p**
4.	Sunt 4 numere prime în mulțime, deci sunt $C_4^2=6$ cazuri favorabile Sunt $C_9^2=36$ de cazuri posibile $p=\dfrac{nr.cazuri\quad favorabile}{nr.cazuri\quad posibile}=\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$	**2p** **1p** **2p**
5.	$\vec{a}\cdot\vec{b}=\lvert\vec{a}\rvert\cdot\lvert\vec{b}\rvert\cdot\cos\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right)=2\cdot 3\cdot\dfrac{1}{2}$ $\vec{a}\cdot\vec{b}=3$	**3p** **2p**
6.	$\left(\dfrac{1}{3}\right)^2+\cos^2 x=1, x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)\Rightarrow\cos x=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ $tgx=-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\Rightarrow 2\sqrt{2}tgx+1=0$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al II-lea		**(30 de puncte)**
1. a)	$\det\left(A(2)\right)=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=2\cdot 2-1\cdot 1=$ $=3$	**3p** **2p**
b)	$A(x)\cdot A(-x)=\begin{pmatrix}x & 1\\ 1 & x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-x & 1\\ 1 & -x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x^2+1 & 0\\ 0 & -x^2+1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}-x^2+1 & 0\\ 0 & -x^2+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Leftrightarrow x=0$	**3p** **2p**
c)	$A(1)+A(2)+...+A(n)=\begin{pmatrix}1+2+...+n & n\\ n & 1+2+...+n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{n(n+1)}{2} & n\\ n & \frac{n(n+1)}{2}\end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix}\frac{n(n+1)}{2} & n\\ n & \frac{n(n+1)}{2}\end{vmatrix}=\frac{n(n+1)}{2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}-n\cdot n=\frac{n^2(n-1)(n+3)}{4}$, pentru orice număr natural nenul n	**2p** **3p**
2. a)	$f\,\vdots\,(X-1)\Leftrightarrow f(1)=0$ $f(1)=1+m-3-17+2m+7=3m-12$ $3m-12=0\Rightarrow m=4$	**2p** **1p** **2p**
b)	x_1 rădăcină a lui $f\Rightarrow x_1^3+x_1^2-17x_1+15=0\Rightarrow x_1^3+x_1^2=17x_1-15$ Analog $x_2^3+x_2^2=17x_2-15$, $x_3^3+x_3^2=17x_3-15$, Adunăm relațiile și obținem $x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_1^2+x_2^2+x_3^2=17\cdot(x_1+x_2+x_3)-15\cdot 3=17\cdot(-1)-15\cdot 3=-62$	**3p** **2p**
c)	Cu notația $3^x=y>0\Rightarrow y^3+y^2-17y+15=0\Rightarrow(y-1)(y-3)(y+5)=0$ $y=-5<0$ $y=1\Rightarrow x=0$ $y=3\Rightarrow x=1$	**2p** **1p** **1p** **1p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. a)	$f'(x)=\dfrac{2x+4}{2\sqrt{x^2+4x+5}}-1=$	**3p**
	$=\dfrac{2(x+2)}{2\sqrt{x^2+4x+5}}-1=\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+5}}-1,\ x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+4x+5}-x-2\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+4x+5-x^2-4x-4}{\sqrt{x^2+4x+5}+x+2}=$	**2p**
	$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4x+5}+x+2}=0,$ deci dreapta de ecuație $y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției.	**3p**
c)	$f'(x)=0\Rightarrow x+2=\sqrt{x^2+4x+5}\Rightarrow x^2+4x+4=x^2+4x+5,$ fals, deci $f'(x)\neq 0,$ pentru orice număr real x	**2p**
	f' are proprietatea lui Darboux, deci f' are semn constant, $f'(0)=\dfrac{2}{\sqrt{5}}-1<0,$ obținem că $f'<0,$ pentru orice număr real x, deci f este descrescătoare $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ și f este continuă $\Rightarrow \operatorname{Im} f=(0,+\infty)$	**3p**
2. a)	$\int_0^1\left(f(x)-\dfrac{1}{x+1}\right)dx=\int_0^1\left(x+\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+1}\right)dx=\int_0^1 x\,dx=$	**3p**
	$=\left.\dfrac{x^2}{2}\right\|_0^1=\dfrac{1}{2}$	**2p**
b)	$\int_0^1 xf(x)dx=\int_0^1\left(x^2+\dfrac{x}{x+1}\right)dx=\int_0^1\left(x^2+1-\dfrac{1}{x+1}\right)dx=$	**2p**
	$=\left.\left(\dfrac{x^3}{3}+x-\ln(x+1)\right)\right\|_0^1=\dfrac{4}{3}-\ln 2$	**3p**
c)	$A=\int_0^1\|f(x)\|dx=\int_0^1\left(x+\dfrac{1}{x+1}\right)dx=\left.\left(\dfrac{x^2}{2}+\ln(x+1)\right)\right\|_0^1=\dfrac{1}{2}+\ln 2$	**3p**
	$\dfrac{1}{2}+\ln 2=\dfrac{1}{2}+\ln\left(n^2+n\right)\Rightarrow n=-2$ nu convine și $n=1$	**2p**