Simulare, Bacalaureat, 11 mai 2023
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Calculați media aritmetică a numerelor $a=2\left(5-\sqrt{5}\right)$ și $b=2\sqrt{5}$.

5p **2.** Determinați numărul real m pentru care vârful parabolei asociate funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x^2+3mx+1$ are abscisa egală cu $\frac{3}{2}$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^x+3^{x+2}=10$.

5p **4.** După o scumpire cu 25%, prețul unui obiect este 250 de lei. Calculați prețul obiectului înainte de scumpire.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,4)$, $B(-3,2)$ și $C(5,2)$. Determinați lungimea medianei din vârful A al triunghiului ABC.

5p **6.** Dacă $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ și $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$, arătați că $\sin^2 x-2\sin x\cos x+\cos^2 x=0$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 5 & -3\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătați că $\det A=1$.

5p **b)** Arătați că $A\cdot A+I_2=O_2$, unde $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

5p **c)** Demonstrați că $\det\left(A-aI_2\right)\geq 1$, pentru orice număr real a.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-3X^2+2X$.

5p **a)** Calculați $f(1)$.

5p **b)** Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la $X-2$.

5p **c)** Calculați $x_1^2+x_2^2+x_3^2$, unde x_1,x_2,x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\ln x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=1+\ln x$, oricare ar fi $x\in(0,\infty)$.

5p **b)** Arătați că funcția f este crescătoare pe $\left[\frac{1}{e},\infty\right)$.

5p **c)** Demonstrați că $f(x)\geq -\frac{1}{e}$, oricare ar fi $x\in(0,\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\frac{1}{x}$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^3 xf(x)dx=\frac{32}{3}$.

5p **b)** Arătați că $\int_1^2\left(f(x)-\frac{1}{x}\right)e^x dx=e^2$.

5p **c)** Determinați numărul real a, $a>1$, pentru care aria suprafeței plane delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=a$, este egală cu $4+\ln a$.

Simulare, Bacalaureat, 11 mai 2023
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$m_a=\dfrac{10-2\sqrt{5}+2\sqrt{5}}{2}=$	**3p**
	$=\dfrac{10}{2}=5$	**2p**
2.	$-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{3m}{2}$	**2p**
	$\dfrac{3m}{2}=\dfrac{3}{2}$	**2p**
	$m=1$	**1p**
3.	$3^x\left(1+3^2\right)=10\Leftrightarrow 3^x=1$	**3p**
	$x=0$	**2p**
4.	$p+\dfrac{25}{100}\cdot p=250,$ unde p este preţul obiectului înainte de scumpire	**2p**
	$p=200$ lei	**3p**
5.	$x_M=1, y_M=2,$ unde punctul M este mijlocul laturii BC	**2p**
	$AM=2$	**3p**

6.	$\sin^2 x = 1-\cos^2 x = \frac{1}{2}$ și, cum $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, obținem $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$	**3p**
	$\sin^2 x - 2\sin x\cos x + \cos^2 x = (\sin x - \cos x)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 0$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = 3\cdot(-3)-(-2)\cdot 5 =$	**3p**
	$= -9+10 = 1$	**2p**
b)	$A\cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	**3p**
	$A\cdot A + I_2 = \begin{pmatrix} -1+1 & 0 \\ 0 & -1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2$	**2p**
c)	$A - aI_2 = \begin{pmatrix} 3-a & -2 \\ 5 & -3-a \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A-aI_2) = \begin{vmatrix} 3-a & -2 \\ 5 & -3-a \end{vmatrix} = -9+a^2+10 =$	**3p**
	$= a^2+1 \geq 1$, pentru orice număr real a	**2p**
2.a)	$f(1) = 1^3 - 3\cdot 1^2 + 2\cdot 1 =$	**2p**
	$= 1-3+2 = 0$	**3p**
b)	Câtul este $X^2 - X$	**2p**
	Restul este 0	**3p**
c)	$x_1+x_2+x_3 = 3,\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1 = 2$	**3p**
	$x_1^2+x_2^2+x_3^2 = 3^2 - 2\cdot 2 = 5$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = 1\cdot\ln x + x\cdot\frac{1}{x}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**3p**
	Finalizare	**2p**
b)	$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{e}$	**2p**
	$f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in \left[\frac{1}{e}, +\infty\right) \Rightarrow f$ crescătoare pe intervalul $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$	**3p**

c)	$f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in\left(0,\frac{1}{e}\right]\Rightarrow f$ descrescătoare pe intervalul $\left(0,\frac{1}{e}\right]$ Din tabelul de variație obținem $f(x)\ge f\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**3p** **2p**
2.a)	$\int_1^3 xf(x)dx=\int_1^3 x\frac{x^2+1}{x}dx=\int_1^3\left(x^2+1\right)dx=$ $=\left.\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\right\|_1^3=\frac{32}{3}$	**2p** **3p**
b)	$\int_1^2 xe^x dx=\left.xe^x\right\|_1^2-\int_1^2 e^x dx=$ $=2e^2-e-\left.e^x\right\|_1^2=e^2$	**3p** **2p**
c)	$Aria=\int_1^a\|f(x)\|dx=\int_1^a\left(x+\frac{1}{x}\right)dx=\left.\left(\frac{x^2}{2}+\ln x\right)\right\|_1^a=\frac{a^2-1}{2}+\ln a$ Din $Aria=4+\ln a\Rightarrow\frac{a^2-1}{2}=4\Rightarrow a^2=9\Rightarrow a=\pm 3$, deoarece $a>1\Rightarrow a=3$	**3p** **2p**