CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ „SFERA"- EDIȚIA a XVIII-a

BĂILEȘTI, 1 APRILIE 2023

CLASA a V-a

Partea I (50 puncte)

Pentru întrebările 1-5 scrieți pe lucrare litera corespunzătoare răspunsului corect:

1. Scriem numărul $2023-\overline{aa}^2$ ca sumă de patru pătrate perfecte nenule, distincte. Care este cea mai mare și cea mai mică cifră folosită ?

a) 8, respectiv 2 ; b) 6, respectiv 3; c) 9, respectiv 3 ; d) 7, respectiv 2.

2. Se dau numerele: $A=1+3+5+\dots+99$, $B=2+4+6+\dots+100$ și $C=1+2+3+\dots+68$. Ordinea crescătoare a numerelor A, B, C este:

a) B<C<A; b) A<C<B ; c) C<A<B; d) C<B<A.

3. Cea mai mare valoare pe care o poate lua unul dintre numerele a, b, c care verifică egalitatea $(3^a+1)(2^b+1)(7^c-6)=2022$ este:

a) 8; b) 5; c) 3; d) 4.

4. Știind că $\frac{\overline{ab}+\overline{xy}}{\overline{ba}+\overline{yx}}$ este echiunitară, atunci fracția $\frac{a+x}{b+y}$ este.

a) supraunitară; b) echiunitară ; c) subunitară; d) ireductibilă.

5. Restul împărțirii numărului $N=2^{2002}\cdot 7^{2023}\cdot 9^{2024}$ la 5 este:

a) 1 ; b) 2 ; c) 3 ; d) 4 .

Probleme propuse de prof. Nicolae Ivășchescu, Canada

Partea a II-a (40 puncte)

Pentru problemele 1 și 2 notează pe lucrare rezolvările complete

Problema 1 (20 puncte)

(10p) a) Demonstrați că numărul $n=3+3^2+3^3+\dots+3^{2022}$ este divizibil cu 91.

prof. Nicolae Ivășchescu, Canada

(10p) b) Demonstrați că penultima cifră a numărului 2^{2025} nu poate fi o cifră pară.

prof. Nicolae Ivășchescu, Canada

Problema 2 (20 puncte)

Demonstrați că dacă numerele naturale a, b, c verifică egalitatea $4a+23b=19c$, atunci numărul $(a+b)(b+c)(c+a)$ este divizibil cu 874.

prof. Nicolae Ivășchescu, Canada

Timp de lucru: 2 ore și 30 min

Din oficiu se acordă : 10 puncte

BAREM - Clasa a V-a

Partea I (5 x 10 p.)

1. d); 2. c); 3. c); 4. b); 5.b)

Partea a II-a

Problema 1

a) $3+3^2+3^3+3^4+3^5+3^6=3(1+3^2+3^4)+3^2(1+3^2+3^4)=(3\cdot 91+9\cdot 91)\,\vdots\,91$......4p

Suma are 2022 de termeni , 2022 $\vdots$ 6..2p

$n=(3+3^2+3^3+3^4+3^5+3^6)+\cdots+(3^{2017}+3^{2018}+3^{2019}+3^{2020}+3^{2021}+$
$+3^{2022})$..2p

$n=91\cdot 12\cdot(1+3^7+3^{13}+\ldots+3^{2017})\,\vdots\,91$..2p

b) $u(2^{2025})=u(2^{4k+1})=2$...2p

$2^{2025}=2^{2023}\cdot 4$..2p

$2^{2025}\,\vdots\,4$...2p

Dacă p este penultima cifră a numărului 2^{2025} , atunci $\overline{p2}\,\vdots\,4$ 1p

Pentru $p\epsilon\{0;2;4;6;8\}$, afirmația nu este adevărată...1p

Finalizare...2p

Problema 2

$874=2\cdot 19\cdot 23$ 2p

$23a+23b=19a+19c=19(a+c)$ 4p

$23(a+b)=23a+23b=19a+19c=19(a+c)$, $(19,23)=1$...4p

$(a+c)\,\vdots\,23$ 2p

$(a+b)\,\vdots\,19$ 2p

$4a+23b=19c|+19b \leftrightarrow \quad 4a+42b=19(b+c) \leftrightarrow \quad 2(2a+21b)=19(b+c)$ 2p

Cum $(19,2)=1$ se obține $(b+c)\,\vdots\,2$ 2p

Finalizare 2p

NOTĂ: Orice altă modalitate corectă de rezolvare se acceptă şi se punctează corespunzător.