CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ „SFERA”,

EDIȚIA a XVIII-a, BĂILEȘTI, 01 APRILIE 2023

CLASA a VII-a

Partea I (50 puncte)

Pentru întrebările 1-5 scrieți pe lucrare litera corespunzătoare răspunsului corect:

1) Se considera numarul real a = $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{100^2}$. Atunci :

a) $a \in \mathbf{N}$ b) $a < 2$ c) $a > 2$ d) $a \in \mathbf{R} / \mathbf{Q}$

2) Se considera trapezul ABCD cu AB || CD si AC $\cap$ BD = {O}. Paralela dusă prin punctul O la AB intersectează laturile neparalele AD si BC in punctele E si F. Fie k un numar real astfel încât $\frac{k}{OE}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{DC}$. Atunci valoarea lui k este :

a) 3 b) 2 c) 1 d) 4

3) Fie S suma tuturor numerelor naturale de forma $\overline{abc}$ cu $0 < a < b < c$ cu proprietatea ca numarul $\sqrt{a,b(c)+b,c(a)+c,a(b)}$ este rational. Atunci S are valoarea:

a) 2023 b) 1000 c) 642 d) 643

4) Fie O punctul de intersectie al diagonalelor patrulaterului convex ABCD. Se stie că $\mathcal{A}$[AOB] = 200cm^2, $\mathcal{A}$[BOC]= 300 cm^2 si $\mathcal{A}$[AOD] = 120 cm^2. Atunci $\mathcal{A}$[DOC] este egala cu:

a) 60 cm^2 b) 70 cm^2 c) 180 cm^2 d) 190 cm^2

5) Într-un bloc sunt 40 de apartamente. Unele au doua camere, iar altele au trei camere. În total sunt 96 de camere. Numărul de apartamente cu două camere este egal cu:

a) 21 b) 22 c) 23 d) 24

Partea a II-a (40 puncte)

Pentru problemele 1 și 2 notează pe lucrare rezolvările complete.

Problema 1 (20 puncte)

Fie $p, n \in \mathbf{N}^*$ si $A = \{ p+1, p+2, p+3, \ldots, p+n \}$. Demonstrati că dacă

$\frac{1}{p+1}+\frac{1}{p+2}+\frac{1}{p+3}+\ldots+\frac{1}{p+n}<\frac{4}{n}$, atunci mulțimea A conține cel mult un pătrat perfect.

(*Gazeta Matematica 5 / 2014)*

Problema 2 (20 puncte)

Demonstrați că dacă un triunghi are două bisectoare congruente, atunci el este isoscel.

Propunator, profesor Ionut Ivanescu, Craiova

Timp de lucru: 2 ore și 30 minute.
Din oficiu se acordă : 10 puncte

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ „SFERA", EDIȚIA a XVIII-a

BĂILEȘTI, 01 APRILIE 2023

BAREM -Clasa a VII-a

Partea I

1) b 2) c 3) d 4) c 5) d

Partea a II-a

1) Sa presupunem prin absurd ca in A s- ar afla doua patrate perfecte.............................1p

Atunci A va contine sigur doua patrate consecutive pe care le notam cu k^2 si $(k + 1)^2$ 1p

Deci $p + 1 \leq p + 2 < \dots < k^2 < k^2 + 1 < k^2 + 2 < (k+1)^2 < (k+1)^2 + 1 < \dots \leq p + n$ 2p

Asadar $p + 1 \leq k^2 < (k+1)^2 \leq p + n$ 2p

Deducem ca $p + n - (p + 1) \geq (k+1)^2 - k^2 \Longrightarrow n - 1 \geq 2k + 1 \Longrightarrow n \geq 2k + 2$ (1) 2p

$$\frac{4}{n} > \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+2} + \frac{1}{p+3} + \dots + \frac{1}{p+n} = \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+2} + \dots + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2+1} +$$

$$+\frac{1}{k^2+1} + \frac{1}{k^2+2} + \dots + \frac{1}{(k+1)^2} + \dots + \frac{1}{p+n} \geq \text{.....} \text{2p}$$

$$\geq \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2+1} + \frac{1}{k^2+2} + \dots + \frac{1}{(k+1)^2} > \text{.....} \text{2p}$$

$$> \overbrace{\frac{1}{(k+1)^2} + \frac{1}{(k+1)^2} + \dots + \frac{1}{(k+1)^2}}^{\text{de } (k+1)^2 - k^2 + 1 \text{ ori}} \text{.....} \text{2p}$$

Deci $\frac{4}{n} > \frac{1}{(k+1)^2} \cdot [(k + 1)^2 - k^2 + 1] \Longrightarrow \frac{4}{n} > \frac{1}{(k+1)^2} \cdot (2k + 2) \,|\, : 2 \Longrightarrow$ 2p

$\Longrightarrow \frac{2}{n} > \frac{1}{k+1} \Longrightarrow 2k + 2 > n$ (2)...2p

Din relatiile (1)si (2) $\Longrightarrow 2k + 2 > 2k + 2$ – contradictie 1p

Asadar multimea A contine cel mult un patrat perfect, c.c.t.d. 1p

2) Fie [BE] si [CF] bisectoarele unghiurilor $\measuredangle ABC$ si $\measuredangle ACB$, $E \in [AC]$ si $F \in [AB]$............................2p

Pe dreapta BC consideram punctele B_1 si C_1 astfel incat $BB_1 = BF$, $CC_1 = CE$,

$B \in [B_1C]$ si $C \in [BC_1]$ 2p

$\measuredangle ACB$ este unghi unghi exterior triunghiului $ECC_1 \Longrightarrow \measuredangle ACB = 2 \cdot \measuredangle EC_1C$ 2p

Deci $2 \cdot \measuredangle FCB = 2 \cdot \measuredangle EC_1C \Longrightarrow \measuredangle FCB \equiv \measuredangle EC_1C$ 2p

Analog $\measuredangle CB_1F = \measuredangle CBE$ 2p

Conform cazului L.U.U. $\Longrightarrow \Delta B_1CF \equiv \Delta BC_1E$ 3p

Deducem ca $BC_1 = CB_1 \Longrightarrow BC + CC_1 = CB + BB_1 \Longrightarrow CC_1 = BB_1 \Longrightarrow CE = BF$......................................2p

Deoarece $CE = BF$, $BC = BC$ si $BE = CF \Longrightarrow \Delta BEC \equiv \Delta CFB$ 3p

Deci $\measuredangle ECB \equiv \measuredangle FBC \Longrightarrow$ triunghiul ABC este isoscel 2p