CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ „SFERA”, EDIȚIA a XVIII-a

BĂILEȘTI, 1 aprilie 2023

CLASA a VIII-a

Partea I (50 puncte)

Pentru întrebările 1-5 scrieți pe lucrare litera corespunzătoare răspunsului corect:

1) $Dacă\ x < 0\ şi\ x^2 + \frac{1}{x^2} = 3, atunci\ x + \frac{1}{x}$ este egal cu :

a) $\sqrt{3}$ b) $-\sqrt{3}$ c) $\sqrt{5}$ d) $-\sqrt{5}$

2) În paralelipipedul dreptunghic ABCDA’B’C’D’, în care AB=6 cm, BC=$6\sqrt{3}$ cm, AA’=$6\sqrt{2}$cm, punctele E şi F sunt proiecţiile punctului A pe dreptele A’B, respective pe A’C. Lungimea segmentului EF este:

a) $2\sqrt{6}\ cm$ b) $4\sqrt{6}\ cm$ c) $2\sqrt{3}$ cm d) $4\sqrt{3}\ cm$

3) Media aritmetică a numerelor reale x şi y pentru care expresia $E(x;y) = -x^2 - y^2+3x+5y+12$ are valoare maximă este:

a) 8 b) 4 c) 2 d) -2

4) Dacă a și b sunt numere reale astfel încât $a - b = 3$, atunci valoarea numărului N=$a^3 - b^3 - 9ab$ este egală cu :

a) 3 b) 9 c) 27 d) 0

5) Fie triunghiul ABC echilateral, cu AB=6 cm şi punctele D şi E de aceeaşi parte a planului (ABC) astfel încât $DA \perp (ABC)$, EC$\perp (ABC)$, DA=8cm, EC=4cm. Distanţa de la punctul D la dreapta de intersecţie a planelor (ABC) şi (DBE) este egală cu:

a) 6 cm b) 8 cm c) 10 cm d) 4,8 cm

Probleme propuse de Lavinia Trincu, profesor Craiova

Partea a II – a (40 puncte) *Pentru problemele 1 și 2 scrieți pe lucrare rezolvările complete*

Problema 1 (20 puncte)

Fie ABCDA’B’C’D’ un cub, AC$\cap BD = \{O\}, DC' \cap D'C = \{Q\}$ $şi\ E$ mijlocul muchiei AA'.

a) Dacă EQ=$4\sqrt{5}$ cm aflaţi muchia cubului.

b) Demonstrați că dreptele EO și BQ sunt perpendiculare.

Prof. Lavinia Trincu, Craiova

Problema 2 (20 puncte)

Fie $a, b, c > 0, cu\ condiţia\ a + b + c = 3$. $Arătaţi\ că$ $\frac{3+a}{\sqrt{bc+3a}} + \frac{3+b}{\sqrt{ca+3b}} + \frac{3+c}{\sqrt{ab+3c}} \geq \frac{18abc}{a^4+b^4+c^4}$.

Problemă selectată din G.M nr.12-2022

Timp de lucru: 2 ore și 30 min

Din oficiu: 10 puncte

BAREM DE EVALUARE – clasa a VIII –a

Partea I (50 puncte) **:**

1) d   2) a   3) c   4) c   5) c

Partea a II – a

Problema 1

a) Fie F mijlocul muchiei DD', atunci EF$\parallel AD$ $și$ $EF \perp (DCC')$ ……………………………**4p**

FQ linie mijlocie în triunghiul D'DC ……………………………………………… **2p**

Dacă AB=2a ,atunci cu teorema lui Pitagora în triunghiul EFQ ,avem EQ= $a\sqrt{5}$

deci AB=8cm.. **4p**

b) EO linie mijlocie în triunghiul A'AC ,deci EO ∥ A'C. **2p**

DB $\perp (A'AC)$, $rezult$ă $A'C \perp DB$ **2p**

BC' $\perp (A'B'C), rezult$ă $A'C \perp BC'$. **2p**

A'C $\perp (DBC'), atunci\ AC' \perp BQ$ si EO $\perp BQ$. **4p**

Problema 2

bc+3a= bc+a(a+b+c)=(a+b)(a+c) …………………………………………………..……….**2p**

Folosind inegalitatea mediilor $\sqrt{bc+3a} = \sqrt{(a+b)(a+c)} \leq \frac{2a+b+c}{2} = \frac{a+3}{2}$, deci $\frac{3+a}{\sqrt{bc+3a}} \geq 2$. **6p**

Însumand obtinem $\frac{3+a}{\sqrt{bc+3a}} + \frac{3+b}{\sqrt{ca+3b}} + \frac{3+c}{\sqrt{ab+3c}} \geq 6$. (1) ………………………………………… **2p**

Folosind inegalitatea $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz\ obtinem$ ………………………………… **2p**

$a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 \geq a^2bc + ab^2c + abc^2 = abc(a+b+c) = 3abc$ ………**4p**

Deci, $\frac{3abc}{a^4+b^4+c^4} . \leq 1$ $și$ $\frac{18abc}{a^4+b^4+c^4} . \leq 6$. (2) **...2p**

Din (1) și (2) se obtine $\frac{3+a}{\sqrt{bc+3a}} + \frac{3+b}{\sqrt{ca+3b}} + \frac{3+c}{\sqrt{ab+3c}} \geq \frac{18abc}{a^4+b^4+c^4}$ **2p**