CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ „SFERA”- EDIȚIA a XVIII-a
BĂILEȘTI, 1 aprilie 2023
CLASA a IX-a

Partea I (50 puncte)
Pentru întrebările 1-5 scrieți pe lucrare litera corespunzătoare răspunsului corect:

1) Dacă notăm cu $[x]$ partea întreagă a numărului real x, atunci numărul soluțiilor ecuației
$$\left[\frac{x-1}{5}\right]=\frac{2x+3}{7}$$
este egal cu:
a) 0 b) 1 c) o infinitate d) 3

2) Numărul $x=\frac{2+5}{7}+\frac{2^2+5^2}{7^2}+\frac{2^3+5^3}{7^3}+\cdots+\frac{2^{2023}+5^{2023}}{7^{2023}}$ aparține intervalului:

a) $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ b) $\left(\frac{1}{2},\ \frac{8}{17}\right)$ c) $(1,\sqrt{2})$ d) $\left(\frac{3}{2},\sqrt{3}\right)$

3) Dacă $x=\sqrt{n^2+7n+14}, n\in\mathbb{N}^*$, cel mai apropiat întreg de x este

a) $n+1$ b) $n+3$ c) $n+4$ d) $n+[\pi^2]$

4) Fie ABC un triunghi și punctele O,G,H respectiv centrul cercului circumscris, centrul de greutate și ortocentrul acestuia. Dacă $3\overrightarrow{OG}+2\overrightarrow{OH}=a\cdot\overrightarrow{OA}+b\cdot\overrightarrow{OB}+c\cdot\overrightarrow{OC};\ a,b,c\in\mathbb{R}$, atunci produsul $a\cdot b\cdot c$ este egal cu:

a) 27 b) 125 c)1 d) 64

5) Fie $ABCD$ un paralelogram, punctul E astfel încât $3\overrightarrow{BE}=5\overrightarrow{ED}$, iar F punctul în care se intersectează dreptele AE și BC. Dacă $\overrightarrow{CF}=x\cdot\overrightarrow{DA}$, atunci x^2+x aparține mulțimii

a) $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ b) $\left(-\frac{1}{2},0\right)$ c) $\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$ d) $\left\{\frac{1}{\sin y}\middle|\, y\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)\right\}$

Partea a II-a (40 puncte)
Pentru problemele 1 și 2 notează pe lucrare rezolvările complete:

Problema 1 (20 puncte)
Fie $ABCDEF$ un hexagon convex, M mijlocul segmentului (AB), G_1 centrul de greutate al patrulaterului $BCDE$, iar punctele G_2, G_3 centrele de greutate ale triunghiurilor ABC, DEF respectiv. Demonstrați că mijlocul segmentului (G_2G_3) este situat pe dreapta MG_1 și stabiliți în ce raport împarte segmentul (MG_1).

Raluca Ciurcea

Problema 2 (20 puncte)
Determinați funcțiile strict crescătoare $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ care au proprietatea că, pentru orice $x,y\in\mathbb{N}$, numărul $(x+3y)\cdot f(x)+\ (y+3x)\cdot f(y)$ este un cub perfect, cel mult egal cu $(x+y)^3$.

Problemă propusă de Prof. Lucian Dragomir, Gazeta Matematică, Nr.11/2022

Timp de lucru: 2 ore și 30 minute.
Din oficiu se acordă : 10 puncte

Barem de evaluare pentru Concursul Național “Sfera“ 2023, clasa a IX-a

Partea I : 1) **d** 2) **d** 3) **c** 4) **a** 5) **b**

Partea a II-a:

1)

Fie G mijlocul segmentului (G_2G_3). Atunci $\vec{0} = \overrightarrow{GG_2} + \overrightarrow{GG_3} = \frac{\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{GE}+\overrightarrow{GF}}{3}$. De aici $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{GF} = \vec{0}$ (1), așadar G este centrul de greutate al hexagonului..….. (5p)
Pe de altă parte $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GE} = 4\overrightarrow{GG_1}$ (2) iar $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GF} = 2\overrightarrow{GM}$ (3)…........................(10 p)
Deducem din relațiile (1), (2) și (3) că $2\overrightarrow{GG_1} + \overrightarrow{GM} = \vec{0}$, așadar $\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{2GG_1}$ (4), de unde rezultă că G, mijlocul segmentului (G_2G_3), este situat pe dreapta MG_1, iar raportul cerut este dat de relația (4)…………………………………………………………………………………….….(5p)

2)

Pentru $x = 1, y = 0$ numărul $f(1) + 3f(0)$ este un număr natural cub perfect, cel mult egal cu 1, de unde $f(1) = 1, f(0) = 0$……………………………………………………………………………......(5p)
Pentru $x = 2, y = 0$ numărul $2f(2)$ este un număr natural cub perfect, cel mult egal cu 8, și, cum funcția este strict crescătoare, deci $2f(2) \geq 4$, deduce că $2f(2)$=8, prin urmare $f(2) = 4 = 2^2$ ....(5p)

Presupunem că $f(n) = n^2, n \in \mathbb{N}$ și demonstrăm că $f(n+1) = (n+1)^2$.

Cum funcția este strict crescătoare, deducem că $f(n+1) \geq n^2 + 1$, deci $(n+1)f(n+1) > n^3$(1).

Pentru $x = n+1, y = 0$ în relația din enunț rezultă $(n+1)f(n+1)$este un cub perfect mai mic sau egal cu $(n+1)^3$. Ținând cont de (1), avem $(n+1)f(n+1) = (n+1)^3$, deci $f(n+1) = (n+1)^2$.
Conform principiului inducției matematice $f(n) = n^2,\ \forall\ n \in \mathbb{N}$……………………………………. (10p)