Concursul interjudețean de matematică
“Sfera Ediția a-XVIII-a ”
Băilești, 1 aprilie 2023
Clasa a X-a

Partea I (50 puncte)

Pentru întrebările 1-5 scrieți pe lucrare litera corespunzătoare răspunsului corect:

1) Dacă x_1 şi x_2 sunt rădăcinile ecuaţiei $x^2 + 2x + 4 = 0$ şi $E = {x_1}^{13} + {x_2}^{13}$ atunci:

a) $E = 2^{12}$ b) $E = -2^{12}$ c) $E = 2^{13}$ d) $E = -2^{13}$

2) Partea întreagă a numărului $A = \sqrt[3]{\log_3 2023}$ este :

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3

3) În $[0, \infty)$ ecuaţia $3^x + 4^x + 5^x + 10^x + 14^x + 21^x = 2^{x+1} + 2 \cdot 6^x + 2 \cdot 35^x$ are:

a) o soluţie b) două soluţii c) trei soluţii d) patru soluţii

4) Dacă $S = \sum_{k=1}^{2023} arctg\,\frac{1}{k^2+k+1}$ atunci:

a) $S = arctg\,\frac{2023}{2024}$ b) $S = arctg\,\frac{2023}{2025}$ c) $S = arctg\,\frac{2024}{2025}$ d) $S = arctg\,\frac{2023}{2022}$

5) Fie $a, b \in (0,1)$ astfel încât $\sqrt[3]{a} - b = \sqrt[3]{b} - a$ şi $a + 1 = 3\sqrt[3]{a^2(1-b)}$. Dacă $E = a + b + ab$ atunci:

a) $E = 1$ b) $E = \frac{1}{4}$ c) $E = \frac{1}{8}$ d) $E = \frac{5}{4}$

Partea a II-a (40 puncte):

1) Rezolvaţi în N^* ecuaţia:

$$(n+1)^n + n^n + (n-1)^n = 11n^2.$$

(*prof.Ionel Tudor, Revista “Sfera“ nr. 1-2/2012*)

20 puncte

2) Fie $a, b, c > 1$. Demonstrați că

$$a(\log_b a + \log_c a) + b(\log_c b + \log_a b) + c(\log_a c + \log_b c) \geq 2(a + b + c).$$

prof. Cătălin Cristea

20 puncte

Timp de lucru: 2 ore și 30 minute.
Din oficiu se acordă : 10 puncte

Barem de evaluare - Concursul interjudețean de matematică “Sfera“ 2023, clasa a X-a

Partea I :1) d   2) b   3) a   4) b   5) d

Partea a II-a:

1) Pentru $n \in \{1,2\}$ ecuaţia nu are soluţii ....3 p

$n = 3$ este soluţie ....3 p

Dacă $n \geq 4$ ecuaţia se scrie echivalent $1 + \left(\frac{n}{n+1}\right)^n + \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n = 11 \cdot \frac{n^2}{(n+1)^n}$ ....3 p

Cu inegalitatea lui Bernoulli avem:

$1 + \left(\frac{n}{n+1}\right)^n + \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n = 1 + \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n + \left(1 - \frac{2}{n+1}\right)^n >$

$> 1 + 1 - \frac{n}{n+1} \mp 1 - \frac{2n}{n+1} = \frac{3}{n+1}$ 5p

Pe de altă parte, cum $n \geq 4$ avem: $11 \cdot \frac{n^2}{(n+1)^n} < 11 \cdot \frac{(n+1)^2}{(n+1)^n} = \frac{11}{(n+1)^{n-2}} < \frac{3}{n+1}$, această ultimă

inegalitate fiind adevărată deoarece $\frac{1}{(n+1)^{n-3}} < \frac{1}{5} < \frac{3}{11}$..5p

Prin urmare : $11 \cdot \frac{n^2}{(n+1)^n} < \frac{3}{n+1} < 1 + \left(\frac{n}{n+1}\right)^n + \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n$ de unde rezultă ca ecuaţia nu are soluţii

dacă $n \geq 4$, deci singura soluţie este $n = 3$ 1p

2) $(a-b)(\log_c a - \log_c b) \geq 0 \Rightarrow a\log_c a + b\log_c b \geq a\log_c b + b\log_c a$ 5p

Analog: $b\log_a b + c\log_a c \geq b\log_a c + c\log_a b$, $c\log_b c + a\log_b a \geq c\log_b a + a\log_b c$ ...5p

Prin adunarea celor trei inegalități obținem:

$a(\log_b a + \log_c a) + b(\log_c b + \log_a b) + c(\log_a c + \log_b c) \geq$

$\geq a(\log_b c + \log_c b) + b(\log_a c + \log_c a) + c(\log_a b + \log_b a) \geq$

$\geq 2a\sqrt{\log_b c \cdot \log_c b} + 2b\sqrt{\log_a c \cdot \log_c a} + 2c\sqrt{\log_a b \cdot \log_b a} = 2(a+b+c)$..............10p