

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Se consideră numerele complexe $z_1 = 1 + 2i$ și $z_2 = 1 - i$. Arătați că $z_1^2 + 4z_2 = 1$.
- 5p** 2. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 1$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 + x + m$, unde m este număr real. Determinați numărul real m pentru care graficele funcțiilor f și g au exact un punct comun.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\lg(x^2 + 9) = 2\lg(x\sqrt{10})$.
- 5p** 4. Se consideră mulțimea A , a numerelor naturale de cel mult două cifre. Determinați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea A , acesta să fie divizibil cu 9.
- 5p** 5. În triunghiul ABC , punctul M este mijlocul laturii AC , iar punctele D și E aparțin segmentului AB , astfel încât $AD = BE$. Arătați că $\overline{MD} + \overline{ME} = \overline{CB}$.
- 5p** 6. Determinați $x \in [0, \pi]$ pentru care $\sin 2x = 1 + \cos 2x$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 1 & a & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} ax + y + 2z = -2 \\ x + ay - z = 4 \\ 2x + 2y + z = 2 \end{cases}$, unde a este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(0)) = 1$.
- 5p** b) Determinați mulțimea numerelor reale a pentru care sistemul de ecuații are soluție unică.
- 5p** c) Pentru $a = 1$, determinați soluțiile (x_0, y_0, z_0) ale sistemului pentru care x_0, y_0 și z_0 sunt numere întregi și $x_0 > y_0 > z_0$.
2. Pe mulțimea $M = [-1, 1]$ se definește legea de compoziție $x * y = \frac{xy}{1 + \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}}$.
- 5p** a) Arătați că $1 * \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.
- 5p** b) Arătați că $x * (-x) \geq -x^2$, pentru orice $x \in M$.
- 5p** c) Determinați perechile (a, b) de numere din mulțimea M pentru care $a * b = 1$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - 1 - \ln(e^x + x^2)$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{x(x-2)}{e^x + x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Determinați numerele reale a pentru care tangenta la graficul funcției f în punctul de coordonate $(a, f(a))$ este paralelă cu axa Ox .
- 5p** c) Determinați imaginea funcției f .

2. Se consideră funcția $f: (-3, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x+3}}$.

5p a) Arătați că $\int_0^3 f(x)\sqrt{x+3} dx = 12$.

5p b) Arătați că $\int_{-2}^1 \frac{f(x)}{x^2 + 1} dx = 2$.

5p c) Demonstrați că $\int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx \leq \frac{\pi}{2}$.

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$z_1^2 + 4z_2 = (1 + 2i)^2 + 4(1 - i) = 1 + 4i + 4i^2 + 4 - 4i =$ $= 5 + 4 \cdot (-1) = 5 - 4 = 1$	3p 2p
2.	$f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 - 2x + m - 1 = 0$ $\Delta = 0$ și, cum $\Delta = 8 - 4m$, obținem $8 - 4m = 0$, deci $m = 2$	2p 3p
3.	$\lg(x^2 + 9) = \lg(10x^2) \Rightarrow x^2 + 9 = 10x^2$, de unde obținem $x^2 - 1 = 0$ $x = -1$, care nu convine; $x = 1$, care convine	3p 2p
4.	Mulțimea A are 100 de elemente, deci sunt 100 de cazuri posibile Numerele din mulțimea A , divizibile cu 9, sunt $9 \cdot 0, 9 \cdot 1, 9 \cdot 2, \dots, 9 \cdot 11$, deci sunt 12 cazuri favorabile, de unde obținem $p = \frac{12}{100} = \frac{3}{25}$	2p 3p
5.	$\overline{MD} = \overline{MA} + \overline{AD}$ și $\overline{ME} = \overline{MC} + \overline{CB} + \overline{BE}$ $\overline{MD} + \overline{ME} = \overline{MA} + \overline{MC} + \overline{AD} + \overline{BE} + \overline{CB} = \vec{0} + \vec{0} + \overline{CB} = \overline{CB}$	2p 3p
6.	$2 \sin x \cos x = 2 \cos^2 x \Leftrightarrow 2 \cos x (\sin x - \cos x) = 0$ Cum $x \in [0, \pi]$, obținem $x = \frac{\pi}{2}$ sau $x = \frac{\pi}{4}$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det(A(0)) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 2 - 2 \cdot 0 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 2 \cdot 0 =$ $= 0 - 2 + 4 - 0 - 1 - 0 = 1$	3p 2p
b)	$\det(A(a)) = (a - 1)^2$, pentru orice număr real a $\det(A(a)) = 0 \Leftrightarrow a = 1$, deci sistemul are soluție unică pentru $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$	3p 2p
c)	Pentru $a = 1$, soluțiile sistemului de ecuații sunt $(\alpha, 2 - \alpha, -2)$, unde $\alpha \in \mathbb{C}$ Cum α este număr întreg și $\alpha > 2 - \alpha > -2$, obținem $\alpha = 2$ sau $\alpha = 3$, deci soluțiile sunt $(2, 0, -2)$ și $(3, -1, -2)$	2p 3p

2.a)	$1 * \frac{1}{2} = \frac{1 \cdot \frac{1}{2}}{1 + \sqrt{(1-1^2) \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)}} =$	3p
	$= \frac{\frac{1}{2}}{1 + \sqrt{0}} = \frac{1}{2}$	2p
b)	$x * (-x) = \frac{-x^2}{1 + 1 - x^2 } = \frac{-x^2}{2 - x^2}, \text{ pentru orice } x \in M$	3p
	$(x * (-x)) + x^2 = \frac{x^2(1 - x^2)}{2 - x^2} \geq 0, \text{ deci } x * (-x) \geq -x^2, \text{ pentru orice } x \in M$	2p
c)	$a * b = 1 \Rightarrow \sqrt{(1 - a^2)(1 - b^2)} = ab - 1, \text{ deci } ab \geq 1$	3p
	Cum $a, b \in M$, obținem $ab = 1$, deci perechile sunt $(-1, -1)$ și $(1, 1)$, care convin	2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = 1 - \frac{1}{e^x + x^2} \cdot (e^x + 2x) =$	3p
	$= \frac{x^2 - 2x}{e^x + x^2} = \frac{x(x-2)}{e^x + x^2}, x \in \mathbb{R}$	2p
b)	Tangenta la graficul funcției f în punctul de coordonate $(a, f(a))$ este paralelă cu axa $Ox \Leftrightarrow f'(a) = 0$	3p
	$\frac{a(a-2)}{e^a + a^2} = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ sau } a = 2$	2p
c)	Pentru orice $x \in (-\infty, 0]$, $f'(x) \geq 0$, deci f este crescătoare pe $(-\infty, 0]$; pentru orice $x \in [0, 2]$, $f'(x) \leq 0$, deci f este descrescătoare pe $[0, 2]$; pentru orice $x \in [2, +\infty)$, $f'(x) \geq 0$, deci f este crescătoare pe $[2, +\infty)$	2p
	Cum f este continuă, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $f(0) = -1$ și $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$, imaginea funcției f este $(-\infty, -1]$	3p
2.a)	$\int_0^3 f(x) \sqrt{x+3} dx = \int_0^3 (x^2 + 1) dx = \left(\frac{x^3}{3} + x \right) \Big _0^3 =$	3p
	$= 9 + 3 = 12$	2p
b)	$\int_{-2}^1 \frac{f(x)}{x^2 + 1} dx = \int_{-2}^1 \frac{(x+3)'}{\sqrt{x+3}} dx = 2\sqrt{x+3} \Big _{-2}^1 =$	3p
	$= 4 - 2 = 2$	2p
c)	$\frac{1}{f(x)} = \frac{\sqrt{x+3}}{x^2 + 1} \leq \frac{2}{x^2 + 1}, \text{ pentru orice } x \in [0, 1], \text{ de unde obținem } \int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx \leq 2 \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx =$	3p
	$= 2 \arctg x \Big _0^1 = \frac{\pi}{2}$	2p