Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Arătați că $2(1+i)-i(2-i)=1$, unde $i^2=-1$.
5p	**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x+10$. Determinați numărul real a pentru care punctul $A(2a,a)$ aparține graficului funcției f.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{2x^2+2}=2x$.
5p	**4.** Determinați câte numere naturale impare, de trei cifre, se pot forma cu elementele mulțimii $A=\{0,1,2,3,4\}$.
5p	**5.** Determinați numărul real a pentru care vectorii $\vec{u}=a\vec{i}+(a-1)\vec{j}$ și $\vec{v}=\vec{i}+2\vec{j}$ sunt coliniari.
5p	**6.** Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu măsura unghiului B egală cu $\frac{\pi}{6}$ și $BC=24$. Bisectoarea unghiului C al triunghiului ABC intersectează latura AB în punctul D. Determinați lungimea segmentului CD.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix}x+1&-1&1\\0&x&0\\1&-1&x+1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det(A(1))=3$.
5p	**b)** Determinați numărul real x pentru care $A(0)\cdot A(x)=A(0)$.
5p	**c)** Determinați numerele reale a și b pentru care $(A(1))^{-1}=aA(1)+bI_3$, unde $(A(1))^{-1}$ este inversa matricei $A(1)$.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=xy+x+y-1+2^{xy}$.
5p	**a)** Arătați că $1*2=8$.
5p	**b)** Arătați că $e=0$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.
5p	**c)** Determinați numărul natural nenul n pentru care $n*\left(-\frac{1}{n}\right)=0$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2x+1+\ln x}{x}$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=-\frac{\ln x}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$.
5p	**b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.
5p	**c)** Demonstrați că $\frac{\ln y}{y}-\frac{\ln x}{x}<\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$, pentru orice $x,y\in(1,+\infty)$ cu $x<y$.
	2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+x$.
5p	**a)** Arătați că $\int_3^5\left(f(x)-x^3\right)dx=8$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^2 \frac{x^2}{f(x)-x+2}dx = \frac{\ln 5}{3}$.

5p **c)** Se consideră funcția $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{f(x)e^{-x}}{x}$. Arătați că orice primitivă $G:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ a funcției g este concavă.

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$2(1+i)-i(2-i)=2+2i-2i+i^2=$	**3p**
	$=2-1=1$	**2p**
2.	$f(2a)=a \Leftrightarrow 6a+10=a$	**3p**
	$a=-2$	**2p**
3.	$2x^2+2=4x^2$, de unde obținem $x^2-1=0$	**2p**
	$x=-1$, care nu convine; $x=1$, care convine	**3p**
4.	Cifra unităților se poate alege în două moduri	**2p**
	Pentru fiecare alegere a cifrei unităților, cifra zecilor se poate alege în 5 moduri și, pentru fiecare alegere a cifrei unităților și a cifrei zecilor, cifra sutelor se poate alege în 4 moduri, deci se pot forma $2\cdot 5\cdot 4=40$ de numere	**3p**
5.	$\frac{a}{1}=\frac{a-1}{2}$	**3p**
	$a=-1$	**2p**
6.	$AC=12$; $\sphericalangle ACD=\frac{\pi}{6}$	**3p**
	$\frac{AC}{CD}=\cos\frac{\pi}{6}$, de unde obținem $CD=8\sqrt{3}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A(1))=\begin{vmatrix}2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 2\end{vmatrix}=2\cdot 1\cdot 2+(-1)\cdot 0\cdot 1+0\cdot(-1)\cdot 1-1\cdot 1\cdot 1-(-1)\cdot 0\cdot 2-0\cdot(-1)\cdot 2=$	**3p**
	$=4+0+0-1-0-0=3$	**2p**
b)	$A(0)=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$, $A(0)\cdot A(x)=\begin{pmatrix}x+2 & -x-2 & x+2\\ 0 & 0 & 0\\ x+2 & -x-2 & x+2\end{pmatrix}$, pentru orice număr real x	**3p**
	$x=-1$	**2p**
c)	$(A(1))^{-1}=aA(1)+bI_3 \Leftrightarrow aA(1)\cdot A(1)+bA(1)=I_3$ și $A(1)\cdot A(1)=\begin{pmatrix}5 & -4 & 4\\ 0 & 1 & 0\\ 4 & -4 & 5\end{pmatrix}$, de unde obținem $\begin{pmatrix}5a+2b & -4a-b & 4a+b\\ 0 & a+b & 0\\ 4a+b & -4a-b & 5a+2b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$	**3p**
	$a=-\frac{1}{3}$ și $b=\frac{4}{3}$	**2p**

2.a)	$1*2=1\cdot 2+1+2-1+2^{1\cdot 2}=$ $=4+4=8$	**3p** **2p**
b)	$x*0=x\cdot 0+x+0-1+2^{x\cdot 0}=x$, pentru orice număr real x $0*x=0\cdot x+0+x-1+2^{0\cdot x}=x$, pentru orice număr real x, deci $e=0$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”	**2p** **3p**
c)	$n*\left(-\frac{1}{n}\right)=\frac{2n^2-3n-2}{2n}$, pentru orice număr natural nenul n $\frac{2n^2-3n-2}{2n}=0\Rightarrow 2n^2-3n-2=0$ și, cum n este număr natural nenul, obținem $n=2$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{\left(2+\frac{1}{x}\right)\cdot x-(2x+1+\ln x)}{x^2}=$ $=\frac{2x+1-2x-1-\ln x}{x^2}=-\frac{\ln x}{x^2},\ x\in(0,+\infty)$	**3p** **2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+1+\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2+\frac{1}{x}\right)=2$ Ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f este $y=2$	**3p** **2p**
c)	$f'(x)<0$, pentru orice $x\in(1,+\infty)\Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(1,+\infty)$ $1<x<y\Rightarrow f(x)>f(y)$, deci $\frac{\ln y}{y}-\frac{\ln x}{x}<\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$, pentru orice $x,y\in(1,+\infty)$ cu $x<y$	**2p** **3p**
2.a)	$\int_3^5\left(f(x)-x^3\right)dx=\int_3^5 x\,dx=\frac{x^2}{2}\Big\|_3^5=$ $=\frac{25}{2}-\frac{9}{2}=8$	**3p** **2p**
b)	$\int_0^2\frac{x^2}{f(x)-x+2}dx=\int_0^2\frac{x^2}{x^3+2}dx=\frac{1}{3}\int_0^2\frac{\left(x^3+2\right)'}{x^3+2}dx=\frac{1}{3}\ln\left(x^3+2\right)\Big\|_0^2=$ $=\frac{\ln 10}{3}-\frac{\ln 2}{3}=\frac{\ln 5}{3}$	**3p** **2p**
c)	$g(x)=\left(x^2+1\right)e^{-x}$ și $G'(x)=g(x)$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci $G''(x)=\left(-x^2+2x-1\right)e^{-x}$ $G''(x)=-(x-1)^2e^{-x}\le 0$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci funcția G este concavă	**3p** **2p**