SIMULARE BACALAUREAT MATEMATICĂ

2023, februarie

Matematică-Informatică

Științele Naturii

Tehnologic

Pedagogic

Subiectul I **(30 de puncte)**

1.Să se calculeze $(x+y)^{2023}$ pentru care $\frac{2023}{\sqrt{2023}-\sqrt{2022}}=x\sqrt{2023}-y\sqrt{2022}$.

1.Se consideră numărul complex $z=1-2i$. Să se calculeze $\left|\frac{z}{\bar{z}}\right|^{2023}$.

1.se arate că $\sqrt{2023}\left(2+\sqrt{2023}\right)-\sqrt{8092}=2023$.

1.Să se determine termenul a_{2023} al unei progresii aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_2=7$ și $a_5=19$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^{2023}+x$. Arătați că funcția f este impară.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^{2022}+2023$. Arătați că funcția f este pară.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^{2022}+2023$. Arătați că $f(1)+2023=f(0)+f(-1)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2$. Calculați $f(1)+f(2)+\cdots+f(9)$.

3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2023^x+2023^{-x}=2$.

3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2023^x+2023^{x+1}=2024$.

3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2023^{x-2}=1$.

3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2023^{x^2-2}=\frac{1}{2023}$.

4. Să se calculeze $\frac{2023!+P_{2022}}{A_{2022}^{2021}}-C_{2023}^{1}$.

4. Să se calculeze $\frac{7!+P_6}{A_6^5}+C_7^1$.

4. Să se calculeze $\frac{C_{10}^2}{A_{10}^2}$.

4. Să se arate că $C_7^1+\log_2 64=3!+C_7^6$.

GHIULER MĂDĂLIN

5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-3,1)$ și $B(13,11)$. Determinați ecuația mediatoarei segmentului AB.

5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-3,1)$ și $B(13,11)$. Determinați ecuația dreptei AB.

5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-3,11)$ și $B(13,11)$. Determinați lungimea segmentului AB.

5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-3,1)$ și $B(13,11)$. Determinați coordonatele simetricului punctului A față de punctul B.

6. Să se afle raportul dintre raza cercului circumscris și raza cercului înscris triunghiului ABC în care $AB = AC = 8$ și măsura unghiului A este de $60°$.

6. Să se afle aria triunghiului ABC în care $AB = AC = 8$ și măsura unghiului A este de $150°$.

6. Să se afle perimetrul triunghiului ABC în care $AB = AC = 6$ și măsura unghiului A este de $60°$.

6. Să se afle cosinusul unghiului B al triunghiului ABC în care $AB = AC = 12$ și măsura unghiului C este de $45°$.

GHIULER MĂDĂLIN

Subiectul al II-lea **(30 de puncte)**

1.Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Să se arate că matricea A este inversabilă.

b) Să se determine matricea $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ pentru care $A = B + I_3$.

c) Să se determine A^{2023}.

1.Fie matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 2^x & -1 \\ 1 & 3^x \end{pmatrix}$, unde x este un număr real.

a) Să se calculeze $A(1) \cdot A(2)$.

b) Să se arate că $A(x)$ este inversabilă, pentru orice număr real x.

c) Să se calculeze $A(0) + A(1) + A(2) + \cdots + A(2023)$.

1.Fie matricea $A(x) = \begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & 2^x \end{pmatrix}$, unde x este un număr real.

a) Să se arate că $\det\big(A(1)\big) = 3$.

b) Să se determine inversa matricei $\big(A(0)\big)$.

c) Să se determine matricea $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $X \cdot A(0) = A(4)$.

GHIULER MĂDĂLIN

2. Pe $\mathbb{Z}$ definim legea de compoziție $'' * ''$ asociativă dată prin $x * y = 5xy + 5(x + y) + 4$, oricare ar fi x și y numere întregi.

a) Să se arate că $x * y = 5(x + 1)(y + 1) - 1$, oricare ar fi x și y numere întregi.

b) Să se afle elementul neutru al legii de compoziție considerate.

c) Să se demonstreze că, pentru orice numere întregi $x_1, x_2, \dots, x_{2023}$, avem că

$x_1 * x_2 * \dots * x_{2023} = 5^{2022} \cdot (x_1 + 1) \cdot (x_2 + 1) \cdot \dots \cdot (x_{2023} + 1) - 1.$

2. Pe $\mathbb{R}$ definim legea de compoziție $'' * ''$ dată prin $x * y = 3xy + 3(x + y) + 2$, oricare ar fi x și y numere reale.

a) Să se arate că $x * y = 3(x + 1)(y + 1) - 1$, oricare ar fi x și y numere reale

b) Să se demonstreze că legea de compoziție $'' * ''$ este asociativă.

c) Să se determine două numere iraționale a și b pentru care $a * b$ este întreg negativ.

2. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție $x * y = x + y + 2023$, oricare ar fi x și y numere reale.

a) Să se arate că $1 * (-1) = \sqrt{2} * (-\sqrt{2})$.

b) Să se determine elementul neutru al legii de compoziție considerate.

c) Să se calculeze suma numerelor naturale n pentru care $n * (n - 2023) < 101$.

1 și 2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = x^2 + y^2$, oricare ar fi x și y numere reale.

a)Să se arate că $\left(\frac{1}{2}\right) * \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1$.

b) Să se arate că $x * y = (x + y)^2 - 2xy$, oricare ar fi x și y numere reale.

c) Să se determine numărul natural n pentru care $n * n = 450$.

d) Să se afle perechile de numere întregi (m, n) pentru care $m * n = (m - n)^2 + 50$.

e) Să se determine numerele reale x pentru care $x^2 * x = 36 - 2x^3$.

f) Să se afle două numere raționale a și b, dar care nu sunt întregi, pentru care $a * b$ este rațional.

GHIULER MĂDĂLIN

Subiectul al III-lea **(30 de puncte)**

1.Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{ln^2 x}{x}$.

a) Să se arate că $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x-1} = 0$.

b) Determinați intervalele de monotonie a funcției f.

c) Demonstrați că $2023^{\sqrt{2022}} < 2022^{\sqrt{2023}}$, pentru orice $x \in (e^2, +\infty)$.

1.Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2023(x^2 + 1) \cdot e^x$.

a) Să se arate că $f'(x) = 2023(x+1)^2 \cdot e^x$, pentru orice număr real x.

b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcției f.

c) Determinați imaginea funcției f.

1.Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$.

a) Să se arate că $f'(x) = \frac{2(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2}$, pentru orice număr real x.

b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

c) Determinați intervalele de monotonie a funcției f.

2. Se consideră funcțiile $f, F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x^2}$ și $F(x) = \int_1^x f(t)dt$.

a) Să se arate că orice primitivă a funcției f este crescătoare.

b) Calculați $\int_0^1 xf(x)dx$.

c) Să se arate că $\int_0^1 F(x)dx = \frac{1-e}{2e}$.

2. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{lnx}{\sqrt{x}}$.

a) Calculați $\int_4^9 \frac{f(x)}{lnx}dx$.

b) Demonstrați că orice primitivă F a funcției f verifică $F(2022) < F(2023)$.

c) Determinați primitiva G a funcției $g: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = |f(x)|$ pentru care $G(1) = 0$.

GHIULER MĂDĂLIN

2. Se consideră funcțiile $f, F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - 2023x^{2022}$ și $F(x) = \frac{x^2}{2} - x^{2023} + 2$.

a) Să se arate că $\int_0^1 \left(x - f(x)\right)dx = 1$.

b) Să se demonstreze că funcția F este o primitivă a funcției f.

c) Calculați $\int_0^1 f(x) \cdot F(x)dx$.

1 și 2. Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

a)Să se arate că $\det A = \det B$.

b) Să se arate că matricea $C = A + B$ nu este inversabilă.

c) Să se afle numărul real x știind că $x(A + B) = \begin{pmatrix} 2023 & 2023 \\ 2023 & 2023 \end{pmatrix}$.

d) Să se afle numerele reale a și b știind că $A^2 + B^2 = \begin{pmatrix} x-1 & 2y-1 \\ 2y-1 & x-1 \end{pmatrix}$.

e) Să se determine numerele rele x și y știind că $A^2 + xA = -I_2$, unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

f) Să se afle numărul natural n pentru care $(A + B)^{2023} = n\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

GHIULER MĂDĂLIN

SUCCES!!!