Examenul de bacalaureat - **simulare județeană**
13 februarie 2023

Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Determinaţi al treilea termen al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, ştiind că b_1=1 şi b_2= 2 .

5p **2.** Se consideră funcția f :ℝ→ ℝ , f(x) = 3x+1 . Determinaţi numerele naturale x , pentru care f(x) < 7.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2+8} = x+2$.

5p **4.** Determinaţi numărul submulţimilor cu două elemente ale mulţimii {0, 1, 2, 3} .

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(1,1), B(4,4) , C(1,a) şi D(2,1) , unde a este număr real. Determinaţi numărul real a , pentru care dreptele AB şi CD sunt paralele.

5p **6**. Calculaţi lungimea ipotenuzei BC a triunghiului dreptunghic ABC , în care AB =10 şi $\cos B = \frac{1}{2}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ și $X(a)=\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{9} & \mathbf{1} \\ \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a^2} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că det(X(-1))=12.

5p **b)** Determinați numerele reale a pentru care $\det(X(a)-I_3)=0$.

5p **c)** În reperul cartezian se consideră punctele A(2,3) , B(3,9) și C(a,a^2) , unde a este număr natural. Determinați numerele naturale a pentru care ABC este triunghi și are aria mai mică decât 3.

2.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă x*y=4x+4y-4xy-3.

5p **a)** Demonstrați că x*y=1-4(x-1)(y-1), pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Arătați că $\boldsymbol{x * \frac{1}{x} \geq 1}$, pentru orice x ∈ (0,+∞).

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care x*x*x*x = x .

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to \mathbb{R}$, $f(x)=2x-(x+1)\ln(x+1)$
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=1-\ln(x+1)$, $x\in(-1,+\infty)$.
5p	**b)** Determinați intervalele de monotonie ale funcţiei f.
5p	**c)** Demonstrați că funcţia f este concavă.
	2. Se consideră funcția f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-e^x$.
5p	**a)** Arătați că $\int_0^1 f(x)dx=\frac{3}{2}-e$.
5p	**b)** Calculați $\int_0^1 xf(x)dx$.
5p	**c)** Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_0^1 x^n(x-f(x))dx$. Demonstrați că $I_n+n\,I_{n-1}=e$, pentru orice număr natural n, $n\geq 2$.

Examenul național de bacalaureat 2023 **-simulare județeană**

Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	Rația progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq1}$ este q = 2 $b_3 = 1 \cdot 2^2 = 4$	3p 2p
2.	. $3x+1<7 \Leftrightarrow x<2$ Cum x este număr natural, obținem x = 0 sau x =1	2p 3p
3.	$x^2+8=(x+2)^2$ x =1 , care convine	2p 3p
4.	$c_4^2 = \frac{4!}{2!\cdot 2!} =$ Dupa simplificare,rezultat final 6	3p 2p
5.	$m_{AB}=1, m_{CD}=1-a$, unde a este numar real $m_{AB}=m_{CD} \Leftrightarrow$ $1-a=1 \Leftrightarrow$ a =0	2p 3p
6.	$$cos\, B = \frac{AB}{BC} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{10}{BC}$$ BC=20	3p 2p

—

SUBIECTUL al II-lea

Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

(30 de puncte)

1.a)	$X(-1)=\begin{pmatrix}2&4&1\\3&9&1\\-1&1&1\end{pmatrix}\Rightarrow \det(X(-1))=\begin{vmatrix}2&4&1\\3&9&1\\-1&1&1\end{vmatrix}=$ $=18+3+(-4)-(-9)-12-2=12$	**2p** **3p**
b)	$\det(X(a)-I_3)=\begin{vmatrix}1&4&1\\3&8&1\\a&a^2&0\end{vmatrix}=2a^2-4a$ $2a^2-4a=0\Leftrightarrow a=0$ sau $a=2$	**3p** **2p**
c)	$\Delta=\begin{vmatrix}2&4&1\\3&9&1\\a&a^2&1\end{vmatrix}=a^2-5a+6$, și cun ABC este triunghi, obtinem $a^2-5a+6\neq 0$ $\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\lvert\Delta\rvert$, deci $\lvert a2-5a+6\rvert<6$ și, cum a este numar natural, obținem a=1 sau a=4	**2p** **3p**
2.a)	$x*y=1-4xy+4x+4y-4=$ $1-4x(y-1)+4(y-1)=1-4(x-1)(y-1)$,pentru orice numere reale x și y	**3p** **2p**
b)	$x*\frac{1}{x}=1-4(x-1)\left(\frac{1}{x}-1\right)=1-4(x-1)\frac{1-x}{x}=$, $1+4\frac{(x-1)^2}{x}\geq 1$,pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**3p** **2p**
c)	$x*x=1-4(x-1)^2$, $x*x*x=1+4^2(x-1)^3$, $x*x*x*x=1-4^3(x-1)^4$, unde x este număr real $(x-1)(1+4^2(x-1)^3)=0$, deci $x=\frac{3}{4}$ sau $x=1$	**3p** **2p**

Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=2-\ln(x+1)-(x+1)\cdot\frac{1}{x+1}=$	**3p**
	$=2-\ln(x+1)-1=1-\ln(x+1)$	**2p**
b)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=e-1$	**2p**
	Pentru orice $x\in(-1,e-1]$, $f'(x)\geq 0$, deci f este crescătoare pe $(-1,e-1]$ și pentru orice $x\in[e-1,+\infty)$, $f'(x)\leq 0$, deci f este descrescătoare pe $[e-1,+\infty)$	**3p**
c)	$f''(x)=-\frac{1}{x+1}$, $x\in(-1,+\infty)$	**2p**
	Cum, pentru orice $x\in(-1,+\infty)$ avem $-\frac{1}{x+1}<0$, obținem $f''(x)<0$, deci f este concavă	**3p**
2.a)	$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left(x-e^x\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}-e^x\right)\Big\|_0^1=$	**3p**
	$=\frac{1}{2}-e+1=\frac{3}{2}-e$	**2p**
b)	$\int_0^1 x f(x)dx=\int_0^1 x\left(x-e^x\right)dx=\int_0^1\left(x^2-xe^x\right)dx=\frac{x^3}{3}\Big\|_0^1-(x-1)e^x\Big\|_0^1=$	**3p**
	$=\frac{1}{3}-1=-\frac{2}{3}$	**2p**
c)	$I_n=\int_0^1 x^n\left(x-f(x)\right)dx=\int_0^1 x^n e^x dx=x^n e^x\Big\|_0^1-n\int_0^1 x^{n-1}e^x dx=$	**3p**
	$=e-nI_{n-1}$, de unde obținem $I_n+nI_{n-1}=e$, pentru orice număr natural n, $n\geq 2$	**2p**