OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 11.02.2023
CLASA a V-a
BAREM DE CORECARE ȘI NOTARE

SUBIECTUL I (7puncte)

Fie numărul $A = 29 + 28 \cdot 29 + 28 \cdot 29^2 + 28 \cdot 29^3 + \cdots + 28 \cdot 29^{2014}$.

a) Să se arate că $A = 29^{2015}$;

b) Să se scrie A ca o sumă de 3 pătrate perfecte.

Soluție:

(4p) a) $A = 29(1 + 28) + 28 \cdot 29^2 + 28 \cdot 29^3 + \cdots + 28 \cdot 29^{2014}$

$A = 29^2 + 28 \cdot 29^2 + 28 \cdot 29^3 + \cdots + 28 \cdot 29^{2014}$

$A = 29^2(1 + 28) + 28 \cdot 29^3 + \cdots + 28 \cdot 29^{2014}$

$A = 29^3 + 28 \cdot 29^3 + \cdots + 28 \cdot 29^{2014}$ (2p)

....

La ultimul pas se obține:

$A = 29^{2014} + 28 \cdot 29^{2014}$ (1p)

$A = 29^{2014}(1 + 28)$

$A = 29^{2014} \cdot 29$

$A = 29^{2015}$ (1p)

(3p) b) $A = 29^{2015}$

$A = 29^{2014} \cdot 29$

$29 = 4 + 9 + 16 = 2^2 + 3^2 + 4^2$ (2p)

$A = 29^{2014} \cdot (2^2 + 3^2 + 4^2)$

$A = (29^{1007} \cdot 2)^2 + (29^{1007} \cdot 3)^2 + (29^{1007} \cdot 4)^2$ (1p)

SUBIECTUL II (7puncte)

Să se determine numerele naturale de forma $\overline{ab}$ care împărțite la 49 dau restul un pătrat perfect.

Soluție:

$\overline{ab} = 49c + r, r < 49$

r pătrat perfect (2p)

$r \in \{0^2, 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2\}$

Cazul 1

Pentru $r = 0 \Rightarrow \overline{ab} = 49c \Rightarrow c \in \{1,2\} \Rightarrow \overline{ab} \in \{49,98\}$

Cazul 2

Pentru $r = 1 \Rightarrow \overline{ab} = 49c + 1 \Rightarrow c \in \{1,2\} \Rightarrow \overline{ab} \in \{50,99\}$

Cazul 3

Pentru $r = 2^2 \Rightarrow \overline{ab} = 49c + 4 \Rightarrow c = 1 \Rightarrow \overline{ab} = 53$ (2p)

Cazul 4

Pentru $r = 3^2 \Rightarrow \overline{ab} = 49 + 9c \Rightarrow c = 1 \Rightarrow \overline{ab} = 58$

Cazul 5

Pentru $r = 4^2 \Rightarrow \overline{ab} = 49c + 16 \Rightarrow c \in \{0,1\} \Rightarrow \overline{ab} \in \{16,65\}$

Cazul 6

Pentru $r = 5^2 \Rightarrow \overline{ab} = 49c + 25 \Rightarrow c \in \{0,1\} \Rightarrow \overline{ab} \in \{25,74\}$

Cazul 7

Pentru $r = 6^2 \Rightarrow \overline{ab} = 49c + 36 \Rightarrow c \in \{0,1\} \Rightarrow \overline{ab} \in \{36,85\}$ (2p)

$\overline{ab} \in \{49,98,50,99,53,58,16,65,25,74,36,85\}$

Finalizare (1p)

SUBIECTUL III (7puncte)

Se dau numerele:

$$A = 2^1 \cdot 2^2 \cdot \ldots \cdot 2^{1985}$$
$$B = (2^{993})^{1985}$$
$$C = 2^{1986} \cdot 2^{1987} \cdot \ldots \cdot 2^{n-1} \cdot 2^n.$$

a) Comparați numerele A și B;

b) Aflați numărul n știind că $A \cdot C = (8^{667})^{1000}$.

Soluție

a) $A = 2^1 \cdot 2^2 \cdot \ldots \cdot 2^{1985} = 2^{1+2+3+\ldots+1985} = 2^{1985 \cdot 1986 : 2} = 2^{1985 \cdot 993}$..............(1p)

$B = (2^{993})^{1985} = 2^{993 \cdot 1985}$...(1p)

$A = B$... ....(1p)

b) $A \cdot C = (8^{667})^{1000}$

$(2^1 \cdot 2^2 \cdot \ldots \cdot 2^{1985}) \cdot (2^{1986} \cdot 2^{1987} \cdot \ldots \cdot 2^{n-1} \cdot 2^n) = ((2^3)^{667})^{1000}$..............(1p)

$2^{1+2+3+\ldots+1985+1986+\ldots+(n-1)+n} = (2^{2001})^{1000}$...(1p)

$2^{n \cdot (n+1) : 2} = 2^{2001 \cdot 1000}$..(1p)

$n(n+1) : 2 = 2001 \cdot 1000 \Leftrightarrow n(n+1) = 2001 \cdot 2000 \Leftrightarrow n = 2000$.......(1p)

SUBIECTUL IV (7puncte)

Determinați numărul natural $\overline{abcd} + 2\overline{abc} - 2022 = 0$.

Gazeta matematică

Str. General Berthelot nr. 28-30, Sector 1, 010168, București
Tel: +40 21 405 62 00, Fax: +40 21 405 63 00
www.edu.ro

Str. N. Iorga nr. 28, 710213, Botoșani
Tel: +40 231584 050, Fax: +40 231584 052
Email: office.isjbt@gmail.com
www.isjbotosani.ro

Soluție:

$10\overline{abc} + d + 2\overline{abc} = 2022$ (1p)

$12\overline{abc} + d = 2022 \Rightarrow$ d număr par (1p)

I $d = o \Rightarrow 12\overline{abc}$=2022 $|:2 \Rightarrow 6\overline{abc} = 1011$ imposibil

par impar (1p)

II $d = 2 \Rightarrow 12\overline{abc} + 2$=2022 $\Rightarrow 12\overline{abc} = 2020 \,|:4$

$3\overline{abc} = 505 \Rightarrow c = 5$ (1p)

$3(100a + 10b + 5) = 505 \Rightarrow 30(10a + b) + 15 = 505 \,| - 15$

$30\overline{ab} = 490$ imposibil 490 nu se divide cu 3

III $d = 4 \Rightarrow 12\overline{abc} + 4 = 2022 \,| - 4 \Rightarrow 12\overline{abc} = 2018$

2018 nu se divide cu 3 (1p)

IV $d = 6 \Rightarrow 12\overline{abc} + 6 = 2022 \,| - 6 \Rightarrow 12\overline{abc} = 2016 \,|:6$ (1p)

$2\overline{abc} = 336 \,|:2$

$\overline{abc} = 168$

$a = 1, b = 6, c = 8$ și numărul căutat este $n = 1686$

V $d = 8 \Rightarrow 12\overline{abc} + 8 = 2022 \,| - 8 \Rightarrow 12\overline{abc} = 2014$ imposibil (1p)