Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală – 11 februarie 2023
Clasa a VII-a
Barem de corectare și notare

Problema 1

Se consideră numărul

$$\boldsymbol{A}=\frac{1}{\sqrt{1\cdot 2}\left(\sqrt{1}+\sqrt{2}\right)}+\frac{1}{\sqrt{2\cdot 3}\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n\cdot(n+1)}\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)}$$

unde $\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}^*$**.**

a) *Arătați că, pentru oricare* $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{\sqrt{n\cdot(n+1)}\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

b) *Pentru n = 2022 aflați valoarea lui **A** și rezolvați în $\mathbb{R}_+$ ecuația*

$$\sqrt{x}\cdot\boldsymbol{A}=\sqrt{x}-\frac{1}{17}$$

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) Amplificând cu $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$) $$\frac{1}{\sqrt{n\cdot(n+1)}\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n\cdot(n+1)}\left(\sqrt{n+1}^2-\sqrt{n}^2\right)}=$$	***1p***
$$=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n+1}}=\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n+1}}-\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}\ \sqrt{n+1}}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$	***2p***
b) Aplicând egalitatea de la punctul a) avem: $$\boldsymbol{A}=\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2022}}-\frac{1}{\sqrt{2023}}=1-\frac{1}{\sqrt{2023}}$$	***1p***
$$2023=7\cdot 17^2 \text{ și avem } \boldsymbol{A}=1-\frac{1}{17\sqrt{7}}$$	***1p***
$$\sqrt{x}\cdot A=\sqrt{x}-\frac{1}{17}\Leftrightarrow(A-1)\sqrt{x}=-\frac{1}{17}\Leftrightarrow-\frac{1}{17\sqrt{7}}\sqrt{x}=-\frac{1}{17}\Leftrightarrow$$	***1p***
$$\Leftrightarrow\sqrt{x}=\frac{1}{17}\cdot\frac{17\sqrt{7}}{1}\Leftrightarrow\sqrt{x}=\sqrt{7}\Leftrightarrow x=7$$	***1p***

Problema 2

Se consideră mulțimile:

$A = \left\{ n \in Z / \sqrt{\frac{n+(-1)^n}{2n+1}} \in Z \right\}$ *și* $B = \left\{ x \in Q \,/\, \sqrt{x^2 + \sqrt{x^2+1}} \in Q \right\}$.

Să se determine mulțimea $A - B$.

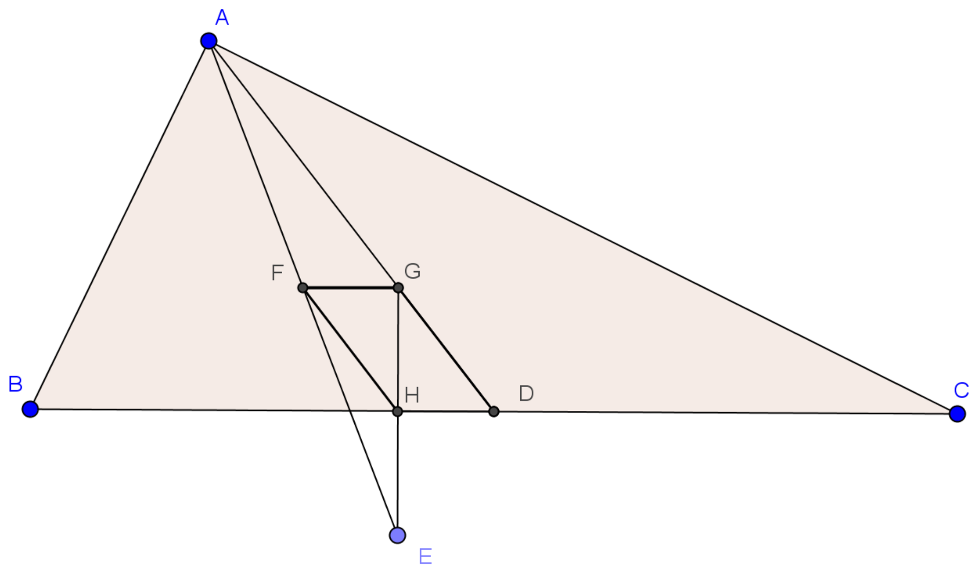
Detalii rezolvare	Barem asociat
Dacă n este par atunci $\frac{n+(-1)^n}{2n+1} = \frac{n+1}{2n+1}, \frac{n+1}{2n+1} \in Z$ rezultă **2n+1 | n+1,** iar din **2n+1 | 2(n+1)-(2n+1)** rezultă **2n+1 | 1** , deci **n** $\in \{-1; 0\}$.	*1p*
Dar **n** este par, deci **n = 0** . Pentru **n = 0** se obține $\sqrt{\frac{n+(-1)^n}{2n+1}} = \sqrt{1} = 1$ deci $0 \in A$	*1p*
Dacă n este impar atunci $\frac{n+(-1)^n}{2n+1} = \frac{n-1}{2n+1}, \frac{n-1}{2n+1} \in Z$ rezultă **2n+1 | n-1, iar din 2n+1 | 2(n-1)-(2n+1)** rezultă **2n+1 | -3** , deci **n** $\in \{-2; -1; 0; 1\}$	*1p*
Dar **n** este impar , deci **n** $\in \{-1; 1\}$. Pentru **n = -1** se obține $\sqrt{\frac{n+(-1)^n}{2n+1}} = \sqrt{2} \notin Z$. Pentru **n = 1** se obține $\sqrt{\frac{n+(-1)^n}{2n+1}} = 0$, $0 \in Z$ deci 1∈ **A** și **A** $= \{0; 1\}$	*1p*
Pentru **x = 0** rezultă $\sqrt{x^2 + \sqrt{x^2+1}} = \sqrt{0 + \sqrt{0+1}} = 1$**, 1∈ Q**	*1p*
Pentru **x = 1** rezultă $\sqrt{x^2 + \sqrt{x^2+1}} = \sqrt{1 + \sqrt{1+1}} = \sqrt{1+\sqrt{2}} \notin$ **Q**	*1p*
$0 \in B, 1 \notin B$, deci **A− B** $= \{1\}$	*1p*

Problema 3

Fie G centrul de greutate al triunghiului oarecare ABC, E simetricul lui G față de dreapta BC, F mijlocul segmentului AE, $\{H\} = GE \cap BC$ și D mijlocul laturii BC.

a) Arătați că punctele G, D, H, F sunt vârfurile unui paralelogram.

b) Calculați aria ΔFGE în funcție de s, unde s este aria paralelogramului de la punctul a).



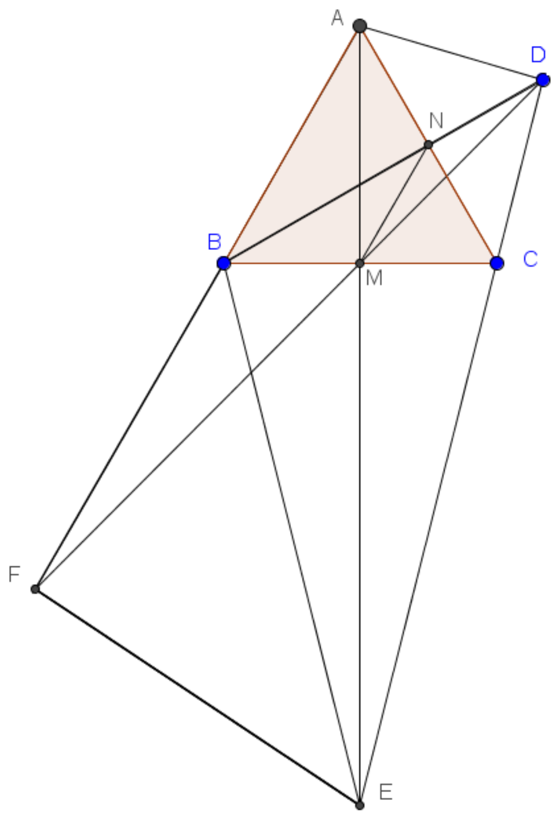
Detalii rezolvare	Barem asociat
a) E simetricul lui G față de dreapta BC, $\{H\} = GE \cap BC \Rightarrow H$ mijlocul lui GE, dar F mijlocul segmentului $AE \Longrightarrow FH$ linie mijlocie în $\Delta\, EAG \Longrightarrow FH \parallel AG$ și $FH = \frac{AG}{2}$	*2p*
G centrul de greutate în $\Delta\, ABC$ și AD mediană $\Longrightarrow GD = \frac{AG}{2} = FH$	*1p*
Cum $FH \parallel AG, G \in AD \Rightarrow FH \parallel GD$ și $FH = GD \Longrightarrow DGFH$ paralelogram	*1p*
b) H mijlocul segmentului $GE \Longrightarrow FH$ mediană în $\Delta\, EFG \Rightarrow A_{FGH} = \frac{A_{FGE}}{2}$	*1p*
$DGHF$ paralelogram $\Longrightarrow A_{FGH} = \frac{A_{DGFH}}{2} = \frac{s}{2}$	*1p*
Deci $A_{FGE} = 2A_{FGH} = 2 \cdot \frac{s}{2} = s$.	*1p*

Problema 4

*Fie triunghiul echilateral **ABC**, punctul **M** mijlocul laturii **BC** și punctul **D** aflat pe bisectoarea unghiului* $\sphericalangle \boldsymbol{ABC}$ *astfel încât* $\sphericalangle \boldsymbol{BDM} = 15°$.

a) *Aflați* $\sphericalangle \boldsymbol{ADC}$.

b) *Dacă **E** este punctul de intersecție al dreptelor **DC** și **AM**, iar **F** punctul de intersecție al dreptelor **AB** și **MD**, demonstrați că* $\boldsymbol{BD} = \boldsymbol{EF}$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
	***1p***
a) Fie **N** mijlocul laturii **AC**. Atunci $\boldsymbol{BN} \perp \boldsymbol{AC}$ și $\boldsymbol{MN} \parallel \boldsymbol{AB}$, deci $\sphericalangle \boldsymbol{DNM} = \sphericalangle \boldsymbol{DNC} + \sphericalangle \boldsymbol{CNM} = 90° + 60° = 150°$.	***1p***
Rezultă $\sphericalangle \boldsymbol{DMN} = 180° - \sphericalangle \boldsymbol{DNM} - \sphericalangle \boldsymbol{NDM} = 180° - 150° - 15° = 15°$, de unde $\boldsymbol{ND} = \boldsymbol{MN}$	***1p***
Reiese $\boldsymbol{ND} = \boldsymbol{NA} = \boldsymbol{NC}$**,** deci $\Delta \boldsymbol{ADC}$ este dreptunghic, iar $\sphericalangle \boldsymbol{ADC} = 90°$**.**	***1p***
b) Din $\sphericalangle \boldsymbol{DBF} = 30° + 120° = 150°$ reiese $\sphericalangle \boldsymbol{DFB} = 15°$, deci $\boldsymbol{DB} = \boldsymbol{BF}$**.**	***1p***
Mediatoarea segmentului **BC** este **AM** , $\sphericalangle \boldsymbol{EBC} = \sphericalangle \boldsymbol{ECB} = 180 - 60° - 45° = 75°$, de unde $\sphericalangle \boldsymbol{EBF} = 120° - 75° = 45°$. (1)	***1p***
Patrulaterul $\boldsymbol{ADEF}$ este inscriptibil, deoarece $\sphericalangle \boldsymbol{EAF} = \sphericalangle \boldsymbol{EDF} = 30°$ și este convex. Rezultă $\sphericalangle \boldsymbol{EFA} = 180° - \sphericalangle \boldsymbol{EDA} = 90°$ de unde, folosind (1), $\sphericalangle \boldsymbol{EBF} = \sphericalangle \boldsymbol{BEF}$**,** deci $\boldsymbol{EF} = \boldsymbol{FB} = \boldsymbol{BD}$**.**	***1p***