Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală – 11 februarie 2023
Clasa a VI-a

Barem de corectare și notare

Problema 1

Fie a, b, c trei numere naturale. Dacă a reprezintă 40% din ($a + b$), iar b reprezintă 30% din ($a + b + c$), atunci:

a) Determinați trei numere naturale prime cu care a, b, c sunt direct proporționale;
b) Dacă $a^2 + b^2 + c^2 = 152$, determinați numerele a, b, c.

Barem de corectare și notare:

a) $a = \frac{40}{100}(a+b) \Leftrightarrow a = \frac{2}{5}(a+b) \Leftrightarrow 3a = 2b$ 1punct

$b = \frac{30}{100}(a+b) \Leftrightarrow b = \frac{3}{10}(a+b+c) \Leftrightarrow 5b = 3c$ 1punct

$\frac{a}{2} = \frac{b}{3}; \;\; \frac{b}{3} = \frac{c}{5}$ 1punct

$\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{5} \Leftrightarrow$ a, b, c direct proporționale cu 2, 3, 5 numere prime 1punct

b) $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{5} = k \Rightarrow a = 2k,\; b = 3k,\; c = 5k$ 1punct

$k^2 = 4 \Rightarrow k = 2$ 1punct

$a = 4$, $b = 6$, $c = 10$ 1punct

Problema 2

Determinați numerele naturale n pentru care $2n + 3$ divide $5n + 4$.

Barem de corectare și notare:

$2n+3|2n+3$, atunci $2n+3|5(2n+3) \Leftrightarrow 2n+3|10n+15$ 2puncte

$2n+3|5n+4$, atunci $2n+3|2(5n+4) \Leftrightarrow 2n+3|10n+8$ 2puncte

$2n+3|\big((10n+15)-(10n+8)\big)$ 1punct

$2n+3|7$ 1punct

$2n + 3 = 1$, n nu este număr natural

$2n+3=7 \Rightarrow n=2 \in \mathbb{N}$ 1punct

Problema 3

Se dau A, O, B trei puncte coliniare, iar C și D două puncte situate de aceeași parte a dreptei AB. Dacă $m(\sphericalangle \mathrm{COD}) = 90°$, iar $m(\sphericalangle \mathrm{AOC})$ este cu $12°$ mai mică decât $m(\sphericalangle \mathrm{BOD})$, calculați măsura unghiului format de bisectoarea $\sphericalangle$AOD cu bisectoarea $\sphericalangle$BOC.

Barem de corectare și notare:

$m(\sphericalangle \mathrm{AOC}) = u \Rightarrow m(\sphericalangle \mathrm{BOD}) = \mathrm{u} + 12°$ 1punct

$2u + 102° = 180° \Rightarrow u = 39°$ 1punct

$m(\sphericalangle AOC) = 39°,\ m(\sphericalangle BOD) = 51°$ 1punct

Dacă [OM bisectoarea $\sphericalangle AOD \Rightarrow m(\sphericalangle AOM) = m(\sphericalangle MOD) = 64°30'$ 1punct

Dacă [ON bisectoarea $\sphericalangle BOC \Rightarrow m(\sphericalangle BON) = m(\sphericalangle NOC) = 70°30'$ 1punct

$m(\sphericalangle MON) = 180° - (m(\sphericalangle AOM) + m(\sphericalangle BON) =$ 1punct

$= 45°$ 1punct

Str. 1 Decembrie nr.5, Cod 420080, Bistrița, Jud. B-N
Tel: +40 (0)263 213529
Fax: +40 (0)263 216654
www.isjbn.ro

Problema 4

Fie șapte unghiuri formate în jurul unui punct, având măsurile în grade exprimate prin numere naturale care dau același rest prin împărțire la 15. Demonstrați că printre acestea există două unghiuri egale.

Barem de corectare și notare:

$u_1 = 15c_1 + r$; $u_2 = 15c_2 + r$; $u_3 = 15c_3 + r$; $u_4 = 15c_4 + r$; $u_5 = 15c_5 + r$; $u_6 = 15c_6 + r$; $u_7 = 15c_7 + r$ 1punct

$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + u_7 = 360° \Rightarrow 15(c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 + c_6 + c_7) + 7r = 360$ 1punct

$\Rightarrow 7r \vdots 15, r < 15 \Rightarrow r = 0$ 1punct

$c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 + c_6 + c_7 = 24$ 1punct

Dar, $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28 > 24$ 1punct

Deci, cel puțin două câturi trebuie să fie egale 1punct

De exemplu, $1 + 2 + 3 + 3 + 4 + 5 + 6 = 24$

Deci, printre cele șapte unghiuri există cel puțin două unghiuri egale 1punct

Str. 1 Decembrie nr.5, Cod 420080, Bistrița, Jud. B-N
Tel: +40 (0)263 213529
Fax: +40 (0)263 216654
www.isjbn.ro