

Simulare - Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)

Matematică M_tehnologic

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|--|
| 5p | 1. Determinați produsul primilor trei termeni ai unei progresii aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$ știind că $a_1 = 4$ și $a_2 = 6$. |
| 5p | 2. Se consideră funcția $f: R \rightarrow R$, $f(x) = 3x - 2$. Determinați numărul real a pentru care punctul $A(a - 1, a + 3)$ aparține graficului funcției f . |
| 5p | 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(5x - 1) = 2$. |
| 5p | 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă suma cifrelor egală cu 3. |
| 5p | 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,4)$, $B(3,2)$. Determinați coordonatele simetricului punctului A față de punctul B . |
| 5p | 6. Calculați $\cos x$, știind că $\sin x = \frac{4}{5}$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. |

SUBIECTUL II

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|--|
| 5p | 1. Se consideră matricele $A(x) = \begin{pmatrix} x+1 & 2 \\ 4 & x-1 \end{pmatrix}$, $x \in R$ și $B = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -8 & 12 \end{pmatrix}$. |
| 5p | a) Arătați că $\det(A(0)) = -9$. |
| 5p | b) Determinați valorile reale ale lui x pentru care matricea $A(x)$ este inversabilă. |
| 5p | c) Determinați valorile reale ale lui x pentru care $A(x) \cdot A(x) = B$. |
| 5p | 2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compozиție $x \circ y = xy - 5x - 5y + 30$. |
| 5p | a) Calculați $-1 \circ 2$. |
| 5p | b) Determinați elementul neutru al legii de compozиție. |
| 5p | c) Rezolvați în mulțimea numerelor întregi inecuația $x \circ x \leq 14$. |

SUBIECTUL III

(30 de puncte)

- | | |
|-----------|---|
| 5p | 1. Fie funcția $f: (-1, \infty) \rightarrow R$, $f(x) = \frac{x^2+4x+4}{x+1}$ |
| 5p | a) Arătați că $f'(x) = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$, $x \in (-1, \infty)$. |
| 5p | b) Aflați ecuația asymptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f . |
| 5p | c) Demonstrați că $f(x) \geq 4$, $\forall x \in (-1, \infty)$. |
| 5p | 2. Se consideră funcția $f: R \rightarrow R$, $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2+1}$. |
| 5p | a) Arătați că $\int_{-1}^1 \left(f(x) - \frac{1}{x^2+1}\right) dx = \frac{2}{3}$. |
| 5p | b) Determinați numărul natural n , știind că $\int_0^1 f(x) dx = \frac{n^2}{3} + \frac{\pi}{4} - 1$. |
| 5p | c) Calculați $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x)-F(1)}{x-1}$, unde $F: R \rightarrow R$ este o primitivă a funcției f . |

Simulare - Examenul național de bacalaureat 2023

Proba E. c)

Matematică M_tehnologic

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracții de punct, dar se pot acorda punetaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1. $a_2 = a_1 + r$, deci $r = 2$, $a_3 = a_2 + r = 6 + 2 = 8$. Produsul primilor trei termeni ai progresiei este $a_1 a_2 a_3 = 4 \cdot 6 \cdot 8 = 192$	3p 2p
2. $A(a-1, a+3) \in G_f \Leftrightarrow f(a-1) = a+3 \Leftrightarrow 3(a-1) - 2 = a+3$ $3a - 3 - 2 = a+3 \Leftrightarrow 2a = 8 \Leftrightarrow a = 4$	3p 2p
3. Condițiile de existență a logaritmilor $5x - 1 > 0$ și obținerea domeniului $D = \left(\frac{1}{5}, \infty\right)$ Ecuația devine: $\log_3(5x - 1) = 2 \Leftrightarrow 5x - 1 = 9$. Rezolvarea ecuației $x = 2 \in D$	1p 2p 2p
4. Multimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile Numerele de două cifre \overline{ab} pentru care $a+b=3, a \neq 0 \Rightarrow a=1, b=2$ sau $a=2, b=1$ sau $a=3, b=0 \Rightarrow$ numerele naturale de două cifre care au suma cifrelor egală cu trei sunt: 12, 21, 30 \Rightarrow nr. cazurilor favorabile este 3 $p = \frac{\text{numărul cazurilor favorabile}}{\text{numărul cazurilor posibile}} = \frac{3}{90} = \frac{1}{30}$	1p 2p 2p
5. B este mijlocul segmentului $[AC]$, unde $C(x_C, y_C)$ este simetricul punctului A față de punctul B. $x_B = \frac{x_A+x_C}{2} \Leftrightarrow 3 = \frac{-1+x_C}{2} \Leftrightarrow x_C = 7$, $y_B = \frac{y_A+y_C}{2} \Leftrightarrow 2 = \frac{4+y_C}{2} \Leftrightarrow y_C = 0$ Finalizare $C(7,0)$	2p 2p 1p
6. $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$ $\cos x = \pm \frac{3}{5}$, dar $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \cos x = \frac{3}{5}$	2p 3p

SUBIECTUL II

(30 de puncte)

1.a) $A(0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, $\det A(0) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) - 2 \cdot 4 = -1 - 8 = -9$	5p
b) Matricea $A(x)$ este inversabilă $\Leftrightarrow \det A(x) \neq 0$ $\det A(x) = \begin{vmatrix} x+1 & 2 \\ 4 & x-1 \end{vmatrix} = (x+1)(x-1) - 8 = x^2 - 9$ Ecuația $\det A(x) = 0$ are soluțiile $x_1 = -3$ și $x_2 = 3$, Matricea $A(x)$ este inversabilă $\Leftrightarrow x \in R \setminus \{-3, 3\}$	1p 3p 1p
c) $A(x) \cdot A(x) = \begin{pmatrix} x+1 & 2 \\ 4 & x-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x+1 & 2 \\ 4 & x-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x+1)^2 + 8 & 4x \\ 8x & (x-1)^2 + 8 \end{pmatrix}$ $A(x) \cdot A(x) = B \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2 + 8 = 8 \\ 4x = -4, 8x = -8 \\ (x-1)^2 + 8 = 12 \end{cases}$ Se obține $x = -1$ care verifică prima și ultima ecuație	2p 2p 1p
2.a) $-1 \circ 2 = -2 + 5 - 10 + 30 = 23$	5p

b)	Există element neutru $\Leftrightarrow [\exists e \in R \text{ a. î. } x \circ e = e \circ x = x, \forall x \in R]$ $x \circ e = xe - 5x - 5e + 30, e \circ x = ex - 5e - 5x + 30 \Rightarrow x \circ e = e \circ x, \forall x \in R$ $xe - 5x - 5e + 30 = x, \forall x \in R \Leftrightarrow (e - 6)(x - 5) = 0, \forall x \in R$ $e - 6 = 0 \Leftrightarrow e = 6 \in R$	1p 1p 2p 1p
c)	$x \circ x \leq 14 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 30 \leq 14 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 16 \leq 0$ Rezolvarea ecuației $x^2 - 10x + 16 = 0$ și obținerea soluțiilor $x_1 = 2$ și $x_2 = 8$. Soluția inecuației este $x \in [2,8]$ Din $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{2,3,4,5,6,7,8\}$	1p 1p 1p 2p

SUBIECTUL III

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{(x^2+4x+4)'(x+1)-(x^2+4x+4)(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{(2x+4)(x+1)-(x^2+4x+4)\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{2x^2+2x+4x+4-x^2-4x-4}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}, \forall x \in (-1, \infty)$	2p 3p												
b)	Căutăm asymptota oblică spre $+\infty$ de forma $y = mx + n$, unde $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 4x + 4}{x(x+1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \left(1 + \frac{4}{x^2} + \frac{4}{x}\right)}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)} = 1 \in \mathbb{R}^*$ $n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+4x+4}{x+1} - x\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+4}{x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \left(\frac{3+\frac{4}{x}}{1+\frac{1}{x}}\right)}{x \left(1+\frac{1}{x}\right)} = 3 \in \mathbb{R}$ Dreapta de ecuație $y = x + 3$ este asymptota oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f	2p 2p 1p												
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \in D, x = -2 \notin D, D = (-1, \infty)$ Tabelul de monotonie: <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>x</td> <td>-1</td> <td>0</td> <td>∞</td> </tr> <tr> <td>$f'(x)$</td> <td>-----</td> <td>0 +</td> <td></td> </tr> <tr> <td>$f(x)$</td> <td></td> <td>4</td> <td></td> </tr> </table> Punctul de coordonate $(0,4)$ este punct de minim absolut pentru graficul funcției f . Valoarea minimă a funcției este $4 \Rightarrow f(x) \geq 4, \forall x \in (-1, \infty)$	x	-1	0	∞	$f'(x)$	-----	0 +		$f(x)$		4		1p 2p 2p
x	-1	0	∞											
$f'(x)$	-----	0 +												
$f(x)$		4												
2.a)	$\int_{-1}^1 \left(f(x) - \frac{1}{x^2+1}\right) dx = \int_{-1}^1 \left(x^2 - \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}\right) dx = \int_{-1}^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$	3p 2p												
b)	$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left(x^2 + \frac{1}{x^2+1}\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} + \operatorname{arctg} x\right]_0^1 = \frac{1}{3} + \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 = \frac{1}{3} + \frac{\pi}{4}$ $\int_0^1 f(x) dx = \frac{n^2}{3} + \frac{\pi}{4} - 1 \Leftrightarrow \frac{n^2}{3} + \frac{\pi}{4} - 1 = \frac{1}{3} + \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow n^2 = 4 \Leftrightarrow n = \pm 2.$ Din n număr natural, obținem $n = 2$	2p 2p 1p												
c)	Funcția F este o primitivă a funcției $f \Rightarrow F'(x) = f(x), \forall x \in R$ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x)-F(1)}{x-1} = F'(1) = f(1) =$ $= 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$	1p 2p 2p												