

Examenul național de bacalaureat 2023

Simulare județeană

Proba Ec)

Matematică *M_mate-info*

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

• Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.

• Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Dacă $z^2 + z + 1 = 0$, unde z este număr complex, arătați că $z^{2023} + \frac{1}{z^{2023}} = -1$.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \{2023x\}$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a lui x .
Arătați că $f\left(x + \frac{1}{2023}\right) = f(x)$, pentru orice număr real x .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$.
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, aceasta să nu conțină cifra 2.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră trapezul $ABCD$ cu $AB \parallel CD$ și $A(1, 2)$, $B(4, 5)$ și $D(-3, 2)$.
Determinați ecuația dreptei MN , știind că segmentul MN este linie mijlocie a trapezului $ABCD$.
- 5p 6. Știind că $\operatorname{tga} = \sqrt{3}$ și $a \in \mathbb{R}$, arătați că $\frac{\sin a - \cos a}{\sin a + \cos a} = 2 - \sqrt{3}$.

SUBIECTUL al II- lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^x \end{pmatrix}$, unde x este un număr real.
- 5p a) Determinați $\det(A(10))$.
- 5p b) Determinați valorile reale ale lui x , știind că $A(x) \cdot A(2x) = A(x^2 + 2)$.
- 5p c) Știind că $A(n) = A(1) \cdot A(2) \cdot \dots \cdot A(2022)$, demonstrați că n este număr natural divizibil cu 2023.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție:
 $x * y = 3xy - 3x - 3y + 4$. Legea „*” este asociativă și are element neutru.
- 5p a) Arătați că $x * y = 3(x - 1)(y - 1) + 1$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p b) Calculați $\frac{1}{1011} * \frac{2}{1011} * \frac{3}{1011} * \dots * \frac{2023}{1011}$.
- 5p c) Determinați numerele reale x care sunt egale cu simetricile lor față de legea „*”.

SUBIECTUL al III- lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} - \{-2\} \rightarrow \mathbb{R}$, definite prin $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x + 2}$.
- 5p a) Determinați ecuațiile asimptotelor la graficul funcției f .
- 5p b) Determinați punctele de extrem local ale funcției f .
- 5p c) Se consideră șirul $(a_n)_{n \geq 1}$, $a_1 = 2$ și $a_{n+1} = f(a_n)$, pentru $n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$. Studiați convergența șirului $(a_n)_{n \geq 1}$ și în caz de convergență, calculați limita șirului.
2. Se consideră funcțiile $f, F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \arctg x$, $F(x) = \int_0^x f(t) dt$.
- 5p a) Arătați că funcția F este convexă pe \mathbb{R} .
- 5p b) Determinați primitiva G a funcției $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = xf(x)$ cu proprietatea că graficul lui G conține punctul $A(1, -\frac{1}{2})$.
- 5p c) Calculați $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x^2)}{x^4}$.

Examenul național de bacalaureat 2023
Simulare județeană
Proba Ec)
Matematică $M_{\text{mate-info}}$
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctaj corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$z^2 + z + 1 = 0 \Rightarrow z^3 = 1$ $z^{2023} = (z^3)^{674} \cdot z = z$, de unde obținem $z^{2023} + \frac{1}{z^{2023}} = z + \frac{1}{z} = -1$.	2p 3p
2.	$f\left(x + \frac{1}{2023}\right) = \left\{2023\left(x + \frac{1}{2023}\right)\right\} = \{2023x + 1\}$ $= \{2023x\} = f(x)$, pentru orice număr real x .	3p 2p
3.	$(2^x - 1)(2^x - 4) = 0 \Leftrightarrow 2^x = 1$ sau $2^x = 4$ $x = 0$ sau $x = 2$.	3p 2p
4.	Sunt $8 \cdot 9 = 72$ de numere naturale de două cifre care nu conțin cifra 2, deci sunt 72 de cazuri favorabile. Sunt 90 de numere naturale de două cifre, deci sunt 90 de cazuri posibile. $P = \frac{\text{nr.cazuri favorabile}}{\text{nr.cazuri posibile}} = \frac{72}{90} = \frac{4}{5}$.	2p 1p 2p
5.	$M(-1, 2)$, unde M este mijlocul segmentului AD , $m_{AB} = 1$. Cum MN este paralelă cu AB , ecuația dreptei MN este $MN: x - y + 3 = 0$.	3p 2p
6.	$\frac{\sin a - \cos a}{\sin a + \cos a} = \frac{\cos a \left(\frac{\sin a}{\cos a} - 1\right)}{\cos a \left(1 + \frac{\sin a}{\cos a}\right)} = \frac{\text{tga} - 1}{1 + \text{tga}} =$ $= \frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$.	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(10) = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{10} \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(10)) = \begin{vmatrix} 1 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{10} \end{vmatrix} =$ $= 2^{10} = 1024$.	2p 3p
b)	$A(x) \cdot A(2x) = A(3x)$ $A(3x) = A(x^2 + 2) \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1$ și $x_2 = 2$.	2p 3p
c)	Deoarece $A(x) \cdot A(y) = A(x + y)$ pentru orice numere reale x și y , obținem $A(n) = A(1) \cdot A(2) \cdot \dots \cdot A(2022) = A(1 + 2 + \dots + 2022) = A(2023 \cdot 1011)$, $n=2023 \cdot 1011$, deci n este număr natural divizibil cu 2023.	3p 2p
2.a)	$x * y = 3xy - 3x - 3y + 4 = 3(xy - x - y + 1) + 1 =$ $= 3(x - 1)(y - 1) + 1$, pentru orice numere reale x și y .	3p 2p
b)	$x * 1 = 1 * y = 1$, pentru orice numere reale x, y . $\frac{1}{1011} * \frac{2}{1011} * \frac{3}{1011} * \dots * \frac{2023}{1011} =$	2p

	$= \left(\frac{1}{1011} * \frac{2}{1011} * \dots * \frac{1010}{1011} \right) * \frac{1011}{1011} * \left(\frac{1012}{1011} * \frac{1013}{1011} * \dots * \frac{2032}{1011} \right) = 1.$	3p
c)	Elementul neutru este $\frac{4}{3}$.	2p
	$x * x = \frac{4}{3} \Leftrightarrow 3(x-1)^2 + 1 = \frac{4}{3} \Leftrightarrow (x-1)^2 = \frac{1}{9}.$	2p
	$x_1 = \frac{2}{3}, x_2 = \frac{4}{3}$	1p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	Calculul limitelor laterale în $x = -2$, dreapta $x = -2$ asimptotă verticală Graficul funcției nu are asimptotă orizontală la $\pm\infty$	2p 1p
	$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 1, n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = -1, y = x - 1$ asimptotă oblică la $+\infty$ Analog, $y = x - 1$ asimptotă oblică la $-\infty$	1p 1p
	b)	Calculul derivatei $f'(x) = \frac{x^2 + 4x + 1}{(x + 2)^2}$ $f'(x) = 0$ implică $x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{3}$ Din tabelul de variație al funcției rezultă $x_1 = -2 - \sqrt{3}$ este punct de maxim local și $x_2 = -2 + \sqrt{3}$ este punct de minim local
c)	Se demonstrează prin inducție matematică că $a_n > 1, \forall n \geq 1$ Se deduce că șirul este descrescător $a_n > a_{n+1}$, funcția f strict crescătoare pe $(1, +\infty)$ implică $f(a_n) > f(a_{n+1})$ deci $a_{n+1} > a_{n+2}$ Șirul este mărginit $1 < a_n \leq 2, \forall n \geq 1$ Șirul este monoton și mărginit rezultă șir convergent, deci există $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$.	2p 2p
	Trecând la limită în relația $a_{n+1} = f(a_n)$, obținem $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$.	1p
	2.a)	F primitiva lui f rezultă $F'(x) = \arctg x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. $F''(x) = \frac{1}{1+x^2} > 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Deci funcția F este convexă pe \mathbb{R} .
b)	$G(x) = \int x f(x) dx = \int x \arctg x dx = \frac{x^2}{2} \arctg x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} dx$ $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int \frac{x^2 + 1 - 1}{x^2 + 1} dx = \int \left(1 - \frac{1}{x^2 + 1}\right) dx = x - \arctg x + C$	2p 2p
	$G(x) = \frac{x^2}{2} \arctg x - \frac{1}{2}(x - \arctg x) + C, G(1) = -\frac{1}{2},$ deci $C = -\frac{\pi}{4}$.	1p
	c)	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x^2)}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} f(t) dt}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2xf(x^2)}{4x^3} =$ $\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg x^2}{x^2} = \frac{1}{2}$.