Examenul național de bacalaureat 2023
Simulare județeană
Proba Ec)
Matematică *M_șt-nat*

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Arătaţi că $\frac{1-i}{1+2i}+\frac{1+i}{1-2i}<0$.
5p	**2.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-2mx+2m+2$, unde m este un parametru real. Determinaţi numerele reale m pentru care vârful parabolei asociate funcţiei f are coordonatele egale.
5p	**3**. Determinaţi numerele reale x pentru care $2\log_3(x+5)+1=\log_3 75$.
5p	**4**. Determinaţi probabilitatea ca alegând un număr natural par de trei cifre acesta să aibă suma cifrelor 9 sau 18.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,1)$ şi $B(3,4)$. Determinaţi ecuaţia dreptei d care trece prin punctul $P(3,3)$ şi este paralelă cu dreapta AB.
5p	**6** Dacă $a\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ şi $\sin a=\frac{3}{5}$ arătaţi că $3\sin x+4\cos x+5\cos(a+x)=0$, pentru orice $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2&2&-1\\0&3&0\\-2&4&1\end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ şi $X(a)=I_3+aA, a\in\mathbb{R}$.
5p	a) Arătaţi că $\det X(1)=16$.
5p	b) Arătaţi că pentru orice numere reale a şi b avem $X(a)\cdot X(b)=X(a+b+3ab)$.
5p	c) Determinaţi numerele naturale m şi n pentru care $X(m)\cdot X(n)=X(9)$.
	2. Pe mulţimea numerelor reale strict pozitive se defineşte legea de compoziţie $x*y=x^{\ln\sqrt[3]{y}}$.
5p	a) Arătaţi că $2*1=1$.
5p	b) Demonstraţi că e^3 este elementul neutru al legii de compoziţie „ * ”.
5p	c) Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale pozitive ecuaţia $x*x=e^3$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$.
5p	a) Arătaţi că $f'(x)=\frac{x-1}{(x+1)^2\sqrt{x^2+1}}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.
5p	b) Determinați ecuația asimptotei orizontale la graficul funcției f către $-\infty$.
5p	c) Determinați imaginea funcției, Imf.
	2. Se consideră funcţiile $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}, f(x)=(x^2+2x+2)e^x$ şi $F:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}, F(x)=(ax^2+bx+c)e^x$.
5p	a) Determinaţi numerele reale a,b,c, ştiind că funcţia F este o primitivă a funcţiei f.
5p	b) Determinaţi primitiva G a funcţiei $g(x)=f(x)-2e^x$, g: $\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, cu proprietatea că graficul lui G contine punctul A(0, 2).
5p	c) Demonstraţi că $\frac{e^2-1}{e^2}\le\int_{-2}^{0}f(x)dx\le\frac{2e^2-2}{e^2}$.

Examenul național de bacalaureat 2023
Simulare județeană
Proba Ec)
Matematică *M_șt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\frac{1-i}{1+2i}+\frac{1+i}{1-2i}=\frac{2+4i^2}{5}=$ $\frac{2-4}{5}=-\frac{2}{5}<0.$	**3p** **2p**
2.	Dacă vârful parabolei are coordonatele egale atunci $m=-\frac{4m^2-8(m+1)}{4}$ $\Leftrightarrow m^2-m-2=0 \Leftrightarrow m\in\{-1,2\}$.	**3p** **2p**
3.	Trebuie ca $x+5>0$. $2\log_3(x+5)+1=\log_3 75 \Leftrightarrow \log_3 3(x+5)^2=\log_3 75 \Leftrightarrow (x+5)^2=25$ $\Leftrightarrow x+5=\pm5 \Rightarrow x=0$ soluţie.	**1p** **2p** **2p**
4.	Numere pare de 3 cifre sunt 450. Dacă suma cifrelor este 9 sau 18 numărul va fi divizibil cu 9. Numere pare de 3 cifre divizibile cu 9 sunt 50. Probabilitatea este egală cu $\frac{50}{450}=\frac{1}{9}$.	**2p** **2p** **1p**
5.	Dacă $d \parallel AB \Leftrightarrow m_d=m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=3$. $d: y-y_P=m_d(x-x_P) \Leftrightarrow d: 3x-y-6=0$.	**3p** **2p**
6.	$a\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ şi $\sin a=\frac{3}{5}\Rightarrow \cos a=-\frac{4}{5}$. $5\cos(a+x)=5\cos a\cos x-5\sin a\,\sin x=-4\cos x-3\sin x$ de unde $3\sin x+4\cos x+5\cos(a+x)=0$, pentru orice $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.	**3p** **2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$X(1)=I_3+A=\begin{pmatrix}3&2&-1\\0&4&0\\-2&4&2\end{pmatrix}$ $det\,X(1)=16$	**2p** **3p**
b)	$X(a)\cdot X(b)=(I_3+aA)(I_3+bA)=I_3+aA+bA+abA^2$ Dar $A^2=3A$ deci $X(a)\cdot X(b)=I_3+aA+bA+3abA=X(a+b+3ab)$.	**3p** **2p**
c)	$X(m)\cdot X(n)=X(9)\Leftrightarrow m+n+3mn=9\Leftrightarrow m=\frac{9-n}{1+3n}\Leftrightarrow 3m=\frac{28}{1+3n}-1\in\mathbb{N}$	**3p**

	$\Leftrightarrow 1+3n \in \{1,2,4,7,14,28\} \Rightarrow n \in \{0,1,2,9\}$ şi soluţiile sunt $(m,n) = \{(9,0);(2,1);(1,2),(0,9)\}$.	**2p**
2.a)	$2*1 = 2^{\ln \sqrt[3]{1}}$ $= 2^0 = 1$	**3p** **2p**
b)	$x * e^3 = x^{\ln \sqrt[3]{e^3}} = x^{\ln e} = x, \forall x > 0$. $e^3 * x = e^{3 \ln \sqrt[3]{x}} = e^{\ln x} = x, \forall x > 0$ deci e^3 este elementul neutru al legii de compoziţie „$*$”.	**2p** **3p**
c)	$x * x = e^3 \Leftrightarrow x^{\frac{\ln x}{3}} = e^3 \Leftrightarrow (\ln x)^2 = 9 \Leftrightarrow$ $\ln x = \pm 3 \Rightarrow x \in \{e^3, e^{-3}\}$.	**3p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}(x+1) - \sqrt{x^2+1}}{(x+1)^2} = \frac{x^2+x-(x^2+1)}{(x+1)^2\sqrt{x^2+1}} =$ $= \frac{x-1}{(x+1)^2\sqrt{x^2+1}}$.	**3p** **2p**
b)	$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\lvert x \rvert \cdot \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = -1$. Dreapta $y = -1$ este asimptota la graficul funcţiei f către $-\infty$.	**2p** **3p**
c)	$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$ Alcătuirea tabelului de variaţie al funcţiei (semnul derivatei, monotonia funcţiei, limitele laterale în -1, limitele la $\pm\infty$) Determinarea punctului de minim, x=1 punct de minim local Imf=$(-\infty,-1) \cup \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$	**1p** **2p** **1p** **1p**
2.a)	F este o primitivă a funcţiei $f \Rightarrow F'(x) = f(x) = (x^2+2x+2)e^x$, pentru $\forall x \in \boldsymbol{R}$ $F'(x) = [ax^2+(2a+b)x+b+c]e^x \Rightarrow$ a=1, b=0 şi c=2.	**2p** **3p**
b)	$G(x) = \int g(x)dx = \int (x^2+2x)e^x\, dx\ rezultă\ G(x) = x^2e^x + C$ $G(0)$ =2 , obţinem $G(x) = x^2e^x + 2$	**3p** **2p**
c)	Pentru $x \in [-2,0]\ obținem\ 1 \le x^2+2x+2 \le 2 \Rightarrow e^x \le f(x) \le 2e^x$ Rezultă $\int_{-2}^{0} e^x\, dx \le \int_{-2}^{0} f(x)dx \le \int_{-2}^{0} 2e^x\, dx\ și\ \int_{-2}^{0} e^x\, dx = \frac{e^2-1}{e^2}$.	**3p** **2p**