

Examenul național de bacalaureat 2023

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Simulare

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică**Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I**(30 de puncte)**

- 5p 1. Calculați suma primilor patru termeni ai unei progresii aritmetice $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ cu rația 2, știind că $a_3 + a_4 = 8$.
- 5p 2. Se consideră ecuația $x^2 + 3mx - m - 2 = 0$, cu rădăcinile x_1, x_2 , unde m este număr real. Determinați valoarea reală a lui m știind că $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 1$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2x + \sqrt{16 + x^2} = 11$.
- 5p 4. Câte numere de trei cifre distincte se pot forma cu cifrele 0,1,2,3,4 și 5?
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,3)$, $B(5,-7)$ și $C(-1,-5)$. Determinați ecuația liniei mijlocii în triunghiul ABC , care este paralelă cu latura BC .
- 5p 6. Se consideră triunghiul ABC cu măsura unghiului C de 150° și latura $AB = 6$. Calculați raza cercului circumscris triunghiului ABC .

SUBIECTUL al II-lea**(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(m) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ m & 1 & -2 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} x + 2y - 3z = 3 \\ 2x - y + z = m \\ mx + y - 2z = 2m \end{cases}$, unde m este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(2)) = 1$.
- 5p b) Pentru $m = 2$, rezolvați sistemul de ecuații.
- 5p c) Pentru $m = 3$, determinați soluțiile (x_0, y_0, z_0) ale sistemului de ecuații, astfel încât $x_0 + y_0 z_0 = 4$ și x_0, y_0, z_0 sunt numere întregi.
2. Pe mulțimea \mathbf{R} se definește legea de compoziție asociativă „*”, $x * y = 2(x - 3)(y - 3) + 3$, pentru orice $x, y \in \mathbf{R}$.
- 5p a) Demonstrați că $x * y * z = 4(x - 3)(y - 3)(z - 3) + 3$, pentru orice $x, y, z \in \mathbf{R}$.
- 5p b) Arătați că $e = \frac{7}{2}$ este elementul neutru al legii de compoziție „*”.
- 5p c) Determinați numerele reale x astfel încât $\underbrace{x * x * \dots * x}_{\text{de } 2023 \text{ ori } x} = 3$.

SUBIECTUL al III-lea**(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 1 - \frac{1}{x} - \ln x$.
- 5p a) Arătați că $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 0$.
- 5p b) Demonstrați că funcția are o singură asimptotă.
- 5p c) Demonstrați că $1 + x \ln x \geq x$, pentru orice număr real x strict pozitiv.

2. Se consideră funcțiile $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = e^x(\sin x + \cos x)$ și $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, g(x) = e^x \sin x$.

- 5p a) Verificați dacă funcția g este o primitivă a funcției f .
- 5p b) Determinați primitiva funcției g a cărei reprezentare grafică conține punctul $O(0,0)$.
- 5p c) Arătați că orice primitivă a funcției f este convexă pe intervalul $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE
Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică.

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare

SUBIECTUL I		(30 de puncte)
1.	Din $a_3 + a_4 = 8$ obținem $2a_1 + 5r = 8$, de unde pentru $r = 2$, deducem că $a_1 = -1$ Suma primilor patru termeni este $S_4 = 8$.	3p 2p
2.	Folosind relațiile lui Viète avem $x_1 + x_2 = -3m$ și $x_1x_2 = -m - 2$. Cum $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 1 \Rightarrow \frac{x_1+x_2}{x_1x_2} = 1 \Rightarrow \frac{-3m}{-m-2} = 1 \Rightarrow m = 1$.	2p 3p
3.	$\sqrt{16 + x^2} = 11 - 2x \Rightarrow 16 + x^2 = (11 - 2x)^2 \Rightarrow 3x^2 - 44x + 105 = 0$ Obținem $x = \frac{35}{3}$ care nu convine și $x = 3$, care convine.	3p 2p
4.	Notăm \overline{abc} numerele de trei cifre distincte din ipoteză, a poate lua 5 valori (oricare din cifrele 1,2,3,4,5), b poate lua 5 valori (oricare din cifrele 0,1,2,3,4,5 mai puțin valoarea luată de a), c poate lua 4 valori (oricare din cifrele 0,1,2,3,4,5 mai puțin valorile luate de a și b). Rezultă că numărul numerelor de trei cifre distincte este $5 \cdot 5 \cdot 4 = 100$	3p 2p
5.	Fie M, N mijloacele laturilor AB respectiv $AC \Rightarrow M(3, -2), N(0, -1)$. Ecuația liniei mijlocii este $MN: \frac{x-x_N}{x_M-x_N} = \frac{y-y_N}{y_M-y_N} \Rightarrow MN: x + 3y + 3 = 0$	2p 3p
6.	$\frac{AB}{\sin C} = 2R$, unde R este raza cercului circumscris triunghiului Cum $\sin C = \frac{1}{2}$, obținem $R = 6$	2p 3p
SUBIECTUL al II-lea		(30 de puncte)
1.a)	$A(2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(2)) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} =$ $= 2 - 6 + 4 - 6 - 1 + 8 = 1$	2p 3p
b)	Deoarece $\det(A(2)) = 1 \neq 0 \Rightarrow$ sistemul este compatibil determinat, se rezolvă cu regula Cramer. Calculăm $\Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 1$, $\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -2$, $\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -2$, Obținem mulțimea soluțiilor sistemului de ecuații $S = \{(1, -2, -2)\}$	1p 3p 1p
c)	Pentru $m = 3$, sistemul este compatibil nedeterminat și soluțiile sistemului sunt de forma $\left(\frac{9+\alpha}{5}, \frac{3+7\alpha}{5}, \alpha\right)$ unde α este un număr întreg. Cum $x_0 + y_0z_0 = 4 \Leftrightarrow \frac{9+\alpha}{5} + \frac{3+7\alpha}{5}\alpha = 4 \Leftrightarrow 7\alpha^2 + 4\alpha - 11 = 0 \Leftrightarrow \alpha \in \left\{1, -\frac{11}{7}\right\}$. Cum $-\frac{11}{7} \notin \mathbf{Z}$, soluția cu componente întregi a sistemului care verifică relația este $(2, 2, 1)$.	3p 2p
2.a)	Utilizând asociativitatea obținem că $x * y * z = (x * y) * z = [2(x - 3)(y - 3) + 3] * z =$ $= 2[2(x - 3)(y - 3) + 3 - 3](z - 3) + 3 = 4(x - 3)(y - 3)(z - 3) + 3$ pentru orice $x, y, z \in \mathbf{R}$.	2p 3p
b)	Calculăm $x * \left(\frac{7}{2}\right) = 2(x - 3)\left(\frac{7}{2} - 3\right) + 3 = 2(x - 3)\left(\frac{1}{2}\right) + 3 = x - 3 + 3 = x$ pentru orice $x \in G$. Tot prin calcul, $\left(\frac{7}{2}\right) * x = x$ pentru orice $x \in G$, deci $e = \frac{7}{2}$ este elementul neutru al legii de compoziție „*”	3p 2p
c)	Deducem din inducția matematică că $\underbrace{x * x * \dots * x}_{\text{de } 2023 \text{ ori } x} = 2^{2022}(x - 3)^{2023} + 3$. Ecuația dată este echivalentă cu $(x - 3)^{2023} = 0$ de unde obținem $x = 3$	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea		(30 de puncte)
1.a)	$f'(x) = \frac{1-x}{x^2}, x \in \mathbf{R}$ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = 0$	3p 2p
b)	Calculăm $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ și deducem că f nu are asimptotă orizontală, apoi calculăm $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} =$ $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1-x \ln x}{x^2} = 0$ și deducem că f nu are asimptotă oblică. Calculăm $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x \ln x}{x} = -\infty \Rightarrow$ dreapta $x = 0$ este unica asimptotă a funcției f	3p 2p
c)	$f'(x) \geq 0$ pentru orice $x \in (0, 1] \Rightarrow f$ este crescătoare pe $(0, 1]$ $f'(x) \leq 0$ pentru orice $x \in [1, +\infty) \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[1, +\infty)$, deci $f(x) \leq f(1) = 0 \Rightarrow$ $f(x) \leq 0$ pentru orice $x \in (0, +\infty)$ Deci $1 - \frac{1}{x} - \ln x \leq 0$ pentru orice $x \in (0, +\infty)$ de unde obținem că $1 + x \ln x \geq x$, pentru orice număr real x strict pozitiv.	3p 2p
2.a)	$g'(x) = (e^x \sin x)' = (e^x)' \sin x + e^x (\sin x)' = e^x (\sin x + \cos x)$ $\Rightarrow g'(x) = f(x)$ pentru orice număr real x , deci g este o primitivă a funcției f .	3p 2p
b)	Calculăm primitivele funcției $g: \int e^x \sin x \, dx = \frac{e^x (\sin x - \cos x)}{2} + C$ Notăm cu $G: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ primitiva lui g a cărei reprezentare grafică conține punctul $O(0,0) \Rightarrow$ $\frac{e^0 (\sin 0 - \cos 0)}{2} + C = 0 \Rightarrow C = \frac{1}{2}$. Deci $G(x) = \frac{e^x (\sin x - \cos x)}{2} + \frac{1}{2}$.	3p 2p
c)	Fie F o primitivă oarecare a lui $f \Rightarrow F'(x) = f(x)$ pentru orice număr real $x \Rightarrow F''(x) = f'(x) =$ $= 2e^x \cos x$ pentru orice număr real x . Dacă $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \cos x \geq 0, e^x > 0$ deci $F''(x) \geq 0 \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, de unde obținem că F este convexă pe intervalul $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.	3p 2p