# Examenul național de bacalaureat 2023
# Proba E. c)
# Matematică *M_şt-nat*

**Simulare - Varianta 1**

***Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii***

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

## SUBIECTUL I (30 puncte)

**5p** **1.** O progresie aritmetică cu rația 5 are suma primilor trei termeni egală cu 126. Determinați primul termen al progresiei.

**5p** **2.** Se consideră funcția $f: R \to R,\ f(x) = -3x^2 + (m+1)x + 5$. Determinați valoarea parametrului real *m*, ştiind că vârful parabolei asociate funcției *f* are abscisa egală cu -1.

**5p** **3.** Rezolvați în **R** ecuația $log_3(2x+1) - log_3(2x-1) = -1$.

**5p** **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un element al mulțimii A=$\{21, 22, 23, \ldots, 29, 30\}$, acesta să fie număr prim.

**5p** **5.** În reperul cartezian *xOy* se consideră punctele A(2,4), B(6,8) şi C(8,2). Calculați distanța de la C la mijlocul segmentului AB.

**5p** **6.** Calculați $(cos\,120^0 + cos\,60^0) \cdot (sin\,135^0 - sin\,45^0)$.

## SUBIECTUL II (30 puncte)

**1.** Se consideră matricea A(x)=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 3x & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde *x* este număr real.

**5p** **a)** Arătați că det (A(0))=1.

**5p** **b)** Arătați că A(x)+A(y)=2A$\left(\frac{x+y}{2}\right)$, pentru orice numere reale *x* şi *y*.

**5p** **c)** Determinați numărul real *x* pentru care A$(x^2+1) \cdot A(x)$=A$(x^2+x+1)$.

**2.** Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție:
$x * y = xy - 6x - 6y + 42, \forall x, y \in R$.

**5p** **a)** Demonstrați că $a * C_4^2 = C_4^2 * a = C_4^2, \forall a \in R$.

**5p** **b)** Demonstrați că legea $*$ este asociativă.

**5p** **c)** Calculați $1 * 2 * 3 * \ldots \ldots * 2023$.

## SUBIECTUL III (30 puncte)

**1.** Fie funcția $f: (1, +\infty) \to R$, f(x)=$\frac{ax+2}{x-1}$, unde a$\epsilon$***R***

**5p** **a)** Determinați valoarea numărului real *a*, ştiind că graficul funcției *f* admite dreapta de ecuație *y* = 2 ca asimptotă orizontală la +∞.

**5p** **b)** Pentru *a* =2, demonstrați că funcția *f* este strict descrescătoare.

**5p** **c)** Pentru *a* =2, demonstrați că $f(\,3\sqrt{2}) < f(2\sqrt{3})$.

**2.** Fie funcția $f: [1,2] \to R,\ f(x) = \frac{1}{x\cdot\sqrt{x^2+1}}$.

**5p** **a)** Demonstrați că funcția $F: [1,2] \to R,\ F(x) = ln\frac{\sqrt{X^2+1}-1}{x}$ este o primitivă a funcției *f*.

**5p** **b)** Arătați că orice primitivă a funcției *f* este monotonă.

**5p** **c)** Calculați $\int f^2(x)\,\mathrm{d}x$.

**Examenul național de bacalaureat 2023**
**Proba E. c)**
**Matematică *M_şt-nat***
**BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE**

**Simulare**

***Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii***

**• Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**

**• Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

**• Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

**SUBIECTUL I** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.** | $S_3 = 3a_1 + 15$ | **3p** |
| | $3a_1 + 15 = 126$, $a_1 = 37$ | **2p** |
| **2.** | $x_V = -\frac{b}{2a}$, $\frac{m+1}{6} = -1$ | **3p** |
| | $m + 1 = -6$, m$= -7$ | **2p** |
| **3.** | $\begin{cases} 2x+1 > 0 \\ 2x-1 > 0 \end{cases}$, $x \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$, $log_3\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right) = -1$ | **3p** |
| | $\frac{2x+1}{2x-1} = \frac{1}{3}$, $x = -1 \notin \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$, în concluzie ecuația nu are soluție în $R$ | **2p** |
| **4.** | card A=10 Numere prime:23, 29 ⇒2 cazuri favorabile | **3p** |
| | $P = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ | **2p** |
| **5.** | Fie M, mijlocul segmentului AB. Coordonatele punctului M (4, 6) | **2p** |
| | d(C, M)=$\sqrt{(8-4)^2 + (6-2)^2}$=$\sqrt{16+16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ | **3p** |
| **6.** | $\cos 120^0 = -\cos 60^0$ sau $\sin 135^0 = \sin 45^0$ | **2p** |
| | $(\cos 120^0 + \cos 60^0) \cdot (\sin 135° - \sin 45^0)$=0 | **3p** |

**SUBIECTUL II** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| 1. a) | $A(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ | **2p** |

| | | |
|---|---|---|
| | det A(0)=$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1+0+0-0-0-0=1$ | **3p** |
| b) | $A(y)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & 0 \\ 3y & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 2A$\left(\frac{x+y}{2}\right)=\begin{pmatrix} 2 & 0 & x+y \\ 0 & 2 & 0 \\ 3x+3y & 0 & 2 \end{pmatrix}$<br>A(x)+ $A(y)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 3x & 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & 0 \\ 3y & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & x+y \\ 0 & 2 & 0 \\ 3x+3y & 0 & 2 \end{pmatrix}$ = 2A$\left(\frac{x+y}{2}\right)$ | **2p**<br><br>**3p** |
| c) | $A(x^2+1)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & x^2+1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3(x^2+1) & 0 & 1 \end{pmatrix}$<br>$A(x^2+x+1)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & x^2+x+1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3(x^2+x+1) & 0 & 1 \end{pmatrix}$<br>$A(x^2+1)\cdot A(x)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & x^2+1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3x^2+3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 3x & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3x^3+3x+1 & 0 & x^2+x+1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3x^2+3x+3 & 0 & 3x^3+3x+1 \end{pmatrix}$<br>$3x^3+3x+1$=1, x$(x^2+1)$=0, $x_1=0, x_{2,3}\notin R$ | **3p**<br><br>**2p** |
| 2.<br>a) | $C_4^2=6$<br>$a*C_4^2=a*6=a6-6a-36+42=6=C_4^2$<br>$C_4^2*a=6*a=6a-36-6a+42=6=C_4^2$ . Finalizare. | **3p**<br><br>**2p** |
| b) | $(x*y)*z=x*(y*z)$ , $\forall x,y,z\in R$<br>$(x*y)*z=(xy-6x-6y+42)*z==xyz-6xz-6yz-6xy+36z+36x+36y-210.$<br>$x*(y*z)=x*(yz-6y-6z+42)=xyz-6xy-6xz-6yz+36x+36y+36z-210$. Finalizare. | **3p**<br><br>**2p** |
| c) | Din a) rezultă că a$*$ 6 =6 $*\, a=6, \forall a\in R$<br>Din b) rezultă că legea “ $*$ ” este asociativă $1*2*3*\ldots\ldots*2023=(1*2*\ldots\ldots 5)*$ $*\,6*(7*8*\ldots\ldots*2023)=6*(7*8*\ldots\ldots*2023)=6$. | **2p**<br><br>**3p** |

**SUBIECTUL III** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1**<br>**a)** | Din y=2 ca asimptotă orizontală la +∞ pentru graficul funcției f deduce că $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$<br>Calculează $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{ax+2}{x-1}$=a ⇒ a=2 | **2p**<br><br>**3p** |
| **b)** | Calculează $f'(x)=\frac{-4}{(x-1)^2}$, $\forall x\in(1,+\infty)$ | **2p** |

| | | |
|---|---|---|
| | Motivează că $\frac{-4}{(x-1)^2} < 0$ , $\forall x \in (1,\infty)$ de unde se obține că f este strict descrescătoare pe $(1,+\infty)$ | **3p** |
| **c)** | Din b) rezultă că funcția f este strict descrescătoare.<br>$3\sqrt{2} > 2\sqrt{3}$<br>$f(3\sqrt{2}) < f(2\sqrt{3})$. | **3p**<br><br>**2p** |
| **2.**<br>**a)** | F este derivabilă pe [1,2] și $F'(x) = \frac{\left(\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}\right)'}{\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\cdot x-\sqrt{x^2+1}+1}{x^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} =$<br>$= \frac{1}{x\cdot\sqrt{x^2+1}}$ | **3p**<br><br>**2p** |
| **b)** | Fie F: $[1,2] \to R$, o primitivă a funcției f<br>$\Rightarrow F'(x) = f(x), \forall x \in [1,2]$<br>$f(x) = \frac{1}{x\cdot\sqrt{x^2+1}} > 0\ \forall x \in [1,2]\ \Rightarrow F'(x) > 0\ \forall x \in [1,2]$<br>$\Rightarrow$ F este monoton crescătoare pe $[1,2]$ | **2p**<br><br>**3p** |
| **c)** | $\int f^2(x)\,dx = \int \frac{1}{x^2\cdot(x^2+1)}dx = \int \frac{1+x^2-x^2}{x^2(x^2+1)}dx =$<br>$\int \left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2+1}\right)dx = \int \frac{1}{x^2}dx - \int \frac{1}{x^2+1}dx = -\frac{1}{x} - arctg\,x + C$ | **2p**<br><br>**3p** |