Examenul de bacalaureat naţional 2023
Proba E. c)
Matematică M_*tehnologic*
Clasa a XII-a

Simulare-Varianta 2

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că $\left(1-\frac{1}{2}:2\right)\cdot 4=3$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:R\to R,\ f(x)=x^2-5x-6$. Determinați coordonatele punctelor de intersecție ale graficului funcţiei f cu axa Ox.

5p **3.** Rezolvați în mulţimea numerelor reale ecuația $\log_3(5-x)=2$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de o cifră, acesta să fie multiplu de 3.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,3)$ şi $B(-5,5)$. Determinaţi lungimea medianei din O a triunghiului OAB.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC dreptunghic în A, cu măsura unghiului B egală cu 45° şi $BC=6$. Calculați aria triunghiului ABC .

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $X(a)=I_2+a\cdot A,\ a\in R$.

5p **a)** Arătați că $\det A=0$.

5p **b)** Determinați numărul real x astfel încât $A^2=xA$.

5p **c)** Determinaţi numărul natural n astfel încât $X(1)+X(3)+X(5)+...+X(51)=n\cdot X(26)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţiţie $x\circ y=x+y+\frac{xy}{3}$, pentru orice $x,y\in R$.

5p **a)** Calculați $5\circ(-3)$.

5p **b)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația $x\circ(x-3)\ge -3$.

5p **c)** Determinați numărul real m astfel încât $2^m\circ 2^m=\frac{16}{3}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:R\setminus\{2\}\to R,\ f(x)=\frac{x^2}{2-x}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{x(4-x)}{(2-x)^2}$, $x\in R\setminus\{2\}$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ a graficului funcției f.

5p **c)** Demonstrați $f(x)+f(y)\le -16$, pentru orice $x,y\in(2,+\infty)$.

2. Se consideră funcțiile $f,g:R\to R$, $f(x)=x^2e^x$, $g(x)=x(x+2)e^x$.

5p **a)** Demonstrați că funcția f este o primitivă a funcției g.

5p **b)** Calculați $\int\frac{g(x)}{f(x)}dx$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **c)** Demonstrați că orice primitivă a funcției $h:(-1,\infty)\to R,\ h(x)=f(x)-g(x)$ este concavă.

Examenul național de bacalaureat 2023

Proba E. c)

Matematică M_*tehnologic*

Simulare-Varianta 2

Barem de corectare

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1	$(1-\frac{1}{2}:2)\cdot 4=\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot 4=$ $\frac{3}{4}\cdot 4=3$.	**3p** **2p**
2	$f(x)=0 \Leftrightarrow x^2-5x-6=0 \Leftrightarrow x\in\{-1;6\}$ deci $Gf \cap Ox=\{A(-1,0),\ B(6,0)\}$.	**3p** **2p**
3	$5-x=3^2$, deci $x=-4$ -4 verifică ecuația $\Rightarrow S=\{-4\}$.	**3p** **2p**
4	Cazurile posibile sunt: $\{0,1,2,3,...,9\}$. Cazurile favorabile sunt: $\{0,3,6,9\}$. $P=\frac{nr.\ cazurilor\ favorabile}{nr.\ cazurilor\ posibile}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$.	**3p** **2p**
5	Mijlocul segmentului AB este punctul $M(-3,4)$. De unde obţine lungimea medianei $OM=5$.	**3p** **2p**
6	Demonstrează că triunghiul ABC este dreptunghic isoscel cu $AB=AC=3\sqrt{2}$ (sau demonstrează că triunghiul ABC este dreptunghic isoscel şi fiind isoscel înălţimea din A, coincide cu mediana din A, fiind deci egală cu jumătate din ipotenuză, adică este 3, sau aplică teorema sinusurilor şi deduce lungimea catetelor). Obţine aria egală cu 9.	**3p** **2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}-2 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-2\cdot 1-2\cdot(-1)=$ $=0$.	**3p** **2p**
b)	$A^2=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -2 & -1\end{pmatrix}=-A$. De unde $A^2=xA \Leftrightarrow x=-1$.	**3p** **2p**

c)	$X(1)+X(3)+X(5)+...+X(51)=(I_2+A)+(I_2+3A)+(I_2+5A)+...+(I_2+51A)=$ $=26I_2+\frac{52\cdot 26}{2}A=$ $=26\cdot X(26)$, de unde $n=26$.	**2p** **2p** **1p**
2.a)	$5\circ(-3)=5+(-3)+\frac{5\cdot(-3)}{3}=$ $=-3$.	**3p** **2p**
b)	$x\circ(x-3)\ge -3 \Leftrightarrow x+(x-3)+\frac{x(x-3)}{3}\ge -3 \Leftrightarrow x^2+3x\ge 0$ Obţine soluţiile ecuaţiei ataşate $x_1=-3,\ x_2=0$, de unde soluţia inecuaţiei $S=(-\infty,-3]\cup[0,\infty)$.	**2p** **1p** **2p**
c)	Notând $2^m=t>0$, ecuaţia devine $t\circ t=\frac{16}{3}\Leftrightarrow t^2+6t-16=0$ Deduce $t=-8<0$, care nu convine şi $t=2$ de unde $m=1$.	**3p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{(x^2)'(2-x)-x^2(2-x)'}{(2-x)^2}=$ $=\frac{4x-x^2}{(2-x)^2}=\frac{x(4-x)}{(2-x)^2}$.	**3p** **2p**
b)	m= $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{2-x}=-1$, de unde $m=-1$. n= $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-mx)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{2-x}+x\right)=-2$, de unde $n=-2$. Dreapta de ecuație $y=-x-2$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcţiei .	**2p** **2p** **1p**
c)	Justifică $f'(x)\ge 0,\ \forall\ x\in(2,4],\ f'(x)\le 0,\ \forall\ x\in[4,\infty)\ \Rightarrow$ f crescătoare pe intervalul $(2,4]$ şi f descrescătoare pe intervalul $[4,\infty)$. $f(x)\le f(4)=-8,\ \forall\ x\in(2,\infty)$, de unde concluzia .	**3p** **2p**
2.a)	f derivabilă pe R şi $f'(x)=(x^2e^x)'=(x^2)'e^x+x^2(e^x)'=2xe^x+x^2e^x$ $\Rightarrow f'(x)=(2x+x^2)e^x=x(x+2)e^x=g(x),\ \forall x\in R$, deci f este o primitivă a funcţiei g.	**3p** **2p**
b)	$\int\frac{g(x)}{f(x)}dx=\int\frac{x^2+2x}{x^2}dx=\int\left(1+\frac{2}{x}\right)dx=$ $=x+2\ln\lvert x\rvert+C=x+2\ln x+C$.	**3p** **2p**
c)	Fie $H:[-1,\infty)\to R$ o primitivă a funcţiei continue h. $H'(x)=h(x)=f(x)-g(x)=-2xe^x,\ \forall x\in[-1,\infty)$. $H''(x)=(-2x-2)e^x,\ \forall x\in[-1,\infty)$. Deduce $H''(x)\le 0,\ \forall x\in[-1,\infty)\Rightarrow H$ concavă $\Rightarrow$ orice primitivă a funcţiei h este concavă .	**1p** **2p** **2p**