Examenul Național de bacalaureat 2023

Proba E.c)

Matematică *M_mate-info*

Simulare Vrancea

Filiera teoretică,profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I -Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete. **(30 de puncte)**

(5p) 1. Câte elemente are mulțimea $(\log_2 5, \log_2 9) \cap \mathbb{Z}$?

(5p) 2. Știind că dreapta $x=1$ este axă de simetrie a graficului funcției $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2 \cdot b \cdot x + 3 \cdot c$ și că punctul A(1,2) apartine graficului, determinați numerele reale b și c.

(5p) 3. Rezolvați, în mulțimea numerelor reale, ecuația : $\sqrt[3]{x+1} = x+1$.

(5p) 4. Determinați numărul funcțiilor $f:\{-2,-1,0,1,2\} \to \{1,2,3\}$ pentru care f(2)=f(-2).

(5p) 5. Fie dreptele d_1 și d_2 de ecuații $x - 3y + 1 = 0$ și respectiv $3x + y + 2 = 0$, a un număr real și punctul $P(0,a)$. Determinați valorile lui a , știind că punctul P este egal depărtat de dreptele d_1 și d_2.

(5p) 6. Arătați că $\sin x + \sqrt{3}\cos x \leq 2$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

SUBIECTUL II -Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete. **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A(m) = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}, m \in \mathbb{R}$ și $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(5p) a) Rezolvați ecuația $\det(A(m)) = 0, m \in \mathbb{R}$.

(5p) b) Arătați că $A^{-1}(-1) = \frac{1}{2}A(0)$.

(5p) c) Determinați $X \in M_{3,1}(\mathbb{R})$ astfel încât $A(-1) \cdot X = B$.

2. Pe mulțimea numerelor raționale $\mathbb{Q}$ se definește legea de compoziție $x * y = \frac{1}{5}xy + 3x + 3y + 30$.

(5p) a) Aflați numărul rațional a pentru care $x * a = a, \forall x \in \mathbb{Q}$.

(5p) b) Dați exemplu de două numere raționale x și y care nu sunt numere întregi și pentru care $x * y$ este număr întreg.

(5p) c) Arătați că funcția $f:\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, f(x) = 5x - 15$ are proprietatea $f(x \cdot y) = f(x) * f(y), \forall x, y \in \mathbb{Q}$.

INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN VRANCEA

MINISTERUL
EDUCAȚIEI

Focșani, Str. Dornei, nr. 5, tel. 0237214141, fax 0237214499

SUBIECTUL III-Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete. **(30 de puncte)**

1.Fie funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\frac{\ln x}{x-1}, x\in(0,\infty)\setminus\{1\}\\ 1, x=1\end{cases}$.

(5p) a) Arătați că f este continuă în punctul $x_0=1$.

(5p) b) Stabiliți dacă f este derivabilă în punctul $x_0=1$.

(5p) c) Arătați că f este descrescătoare.

2. Fie funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\int_0^1\frac{t^x}{t+1}dt$

(5p) a) Calculați $f(1)$.

(5p) b) Arătați că $f(x+1)+f(x)=\frac{1}{x+1}$.

(5p) c) Arătați că $f(x)\geq\frac{1}{2(x+1)}, \forall x\in(1,\infty)$

Focșani, Str. Dornei, nr. 5, tel. 0237214141, fax 0237214499

Examenul Național de bacalaureat 2023

Proba E.c)

Matematică *M_mate-info*

Simulare Vrancea

Filiera teoretică,profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentrurezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

SUBIECTUL I *(30 puncte)*

1.	$3=\log_2 8$, $log_2 8 \in (log_2 5, log_2 9), 2 = log_2 4 < log_2 5; 4 = log_2 16 > log_2 9$,	3p
	$(log_2 5, log_2 9) \cap \mathbb{Z} = \{3\}$, Card $(log_2 5, log_2 9) \cap \mathbb{Z} = 1$	2p
2.	$-\frac{2b}{2}=1 \Rightarrow b=-1$	2p
	$A(1,2)\in G_f \Rightarrow f(1)=2 \Rightarrow 1-2+3c=2 \Rightarrow c=1$	3p
3.	$(x+1)=(x+1)^3 \Rightarrow (x+1)^3-(x+1)=0$	2p
	$\Rightarrow (x+1)\cdot(x+1-1)\cdot(x+1+1)=0 \Rightarrow x\in\{-1,0,-2\}$	3p
4.	$f(2)=f(-2)\in\{1,2,3\}$	2p
	$3\cdot 3^3=81$	3p
5.	$d(P,d_1)=\frac{\lvert -3a+1\rvert}{\sqrt{10}}, d(P,d_2)=\frac{\lvert a+2\rvert}{\sqrt{10}}$	2p
	$\lvert -3a+1\rvert=\lvert a+2\rvert \Rightarrow a\in\left\{-\frac{1}{4},\frac{3}{2}\right\}$	3p

6.	$\sin x+\sqrt{3}\cdot\cos x=2\cdot\left(\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)=2\cdot\left(\cos\frac{\pi}{3}\sin x+\sin\frac{\pi}{3}\cos x\right)$ $2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\leq 2$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

1.a)	$\det A(m)=(m+2)\cdot(m-1)^2$ $m\in\{-2,1\}$	3p 2p
1.b)	Se verifică $A(-1)\cdot\frac{1}{2}A(0)=\frac{1}{2}A(0)\cdot A(-1)=I_3$ Finalizare	2p 3p
1.c)	$X=A^{-1}(-1)\cdot B=\frac{1}{2}A(0)\cdot B$ $X=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$	3p 2p
2.a)	$\frac{1}{5}xa+3x+3a+30=a$ $\frac{a\cdot(x+10)}{5}=-3(x+10)\forall a\in\mathbb{Q}\Rightarrow a=-15$	2p 3p
2.b)	orice combinație care să respecte cerința	5p
2.c)	$f(xy)=5xy-15$ $f(x)*f(y)=(5x-15)*(5y-15)=\frac{25}{5}(x-3)\cdot(y-3)+15(x-3)+15(y-3)+30=$ $=5xy-15x-15y+45+25x-45+15y-45+30=15xy-15$	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

1.a)	$\lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1} \overset{L'H}{\underset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}} \lim_{x\to1}\frac{1}{x} = 1$ f(1)=1 , Finalizare	3p 2p
1.b)	$f'(1) = \lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1}\frac{\frac{\ln x}{x-1}-1}{x-1}$ $\lim_{x\to1}\frac{\ln x - x + 1}{(x-1)^2} \overset{L'H}{\underset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}} \lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{x}-1}{2(x-1)} = \lim_{x\to1}\frac{-1}{2x} = -\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$	2p 3p
1.c)	$x \neq 1 \Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{x}{x-1} - \ln x}{(x-1)^2}, (x-1)^2 > 0$ $g:(0,\infty)\to\mathbb{R}, g(x) = \frac{x-1}{x} - \ln x, g'(x) = \frac{1-x}{x^2}$ g crescatoare pe (0,1) si descrescatoare daca x>1, g(1)=0 deci $g(x) < 0, \forall x \in (0,\infty)\setminus\{1\} \Rightarrow f'(x) < 0$, deci f descrescatoare	2p 3p
2.a)	$f(1) = \int_0^1 \frac{t}{t+1}dt$ $f(1) = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{t+1}\right)dt = t\Big\|_0^1 - \ln(t+1)\Big\|_0^1 = 1 - \ln 2$	2p 3p
2.b)	$f(x+1) + f(x) = \int_0^1 \frac{t^{x+1}}{t+1}dt + \int_0^1 \frac{t^x}{t+1}dt$ $\int_0^1 \frac{t^x(t+1)}{t+1}dt = \int_0^1 t^x dt = \frac{t^{x+1}}{x+1}\Big\|_0^1 = \frac{1}{x+1}$	2p 3p
2.c)	$t\in[0,1] \Rightarrow t+1 \in [1,2] \Rightarrow \frac{1}{t+1} \geq \frac{1}{2}$ $\frac{t^x}{t+1} \geq \frac{t^x}{2} \Rightarrow \int_0^1 \frac{t^x}{t+1}dt \geq \int_0^1 \frac{t^x}{2}dt \Rightarrow f(x) \geq \frac{1}{2}\frac{t^{x+1}}{x+1}\Big\|_0^1 = \frac{1}{2(x+1)}$	2p 3p