

**Examenul național de bacalaureat 2023**
**Proba E. c)**
**Matematică M\_șt-nat**
**Simulare-3.02.2023**
*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

**Subiectul I**
**( 30 de puncte)**

- 5p 1. Fie numărul real  $a = \sqrt{2 + \sqrt{3}} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}$ . Arătați că  $a^2$  este un număr natural.
- 5p 2. Determinați numărul real  $m$  știind că vârful parabolei asociată lui  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = mx^2 + 4x - 6$  are abscisa egală cu ordonata.
- 5p 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $\sqrt{1+x} = 2\sqrt{3}x$ .
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor de două cifre acesta să aibă o cifră pară și una impară
- 5p 5 Se consideră punctele  $A(2, -1)$ ,  $B(-2, 0)$  și  $C(0, 3)$ . Determinați lungimea vectorului  $\overline{OD}$ , știind că  $ABCD$  este paralelogram, iar  $O$  este originea reperului cartezian.
- 5p 6. Arătați că  $\sin 3x + \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , dacă  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  și  $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

**Subiectul II**
**( 30 de puncte)**

1. Se consideră matricea  $A(a) = \begin{pmatrix} a & 4 \\ -4 & a \end{pmatrix}$ , unde  $a \in \mathbb{R}$
- 5p a) Arătați că  $\det A(-1) = 17$ .
- 5p b) Demonstrați că  $A(2023 - a) + A(2023 + a) = 2A(2023)$ .
- 5p c) Determinați perechile de numere reale  $x$  și  $y$  pentru care  $A(x)A(y) = 2A(-8)$ .
2. Se consideră pe mulțimea  $G = (-2, 2)$  legea de compoziție  $x * y = \frac{4x + 4y}{4 + xy}$
- 5p a) Arătați că  $0$  este elementul neutru al legii de compoziție  $*$ .
- 5p b) Rezolvați în  $G$  ecuația  $x * x = 8/5$
- 5p c) Se consideră funcția  $f: (0, \infty) \rightarrow G, f(x) = \frac{2(x-1)}{x+1}$ . Arătați că  $f(xy) = f(x) * f(y)$ , orice  $x, y > 0$

**Subiectul III**
**( 30 de puncte)**

1. Se consideră funcția  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x} \ln x$ .
- 5p a) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1}$ .
- 5p b) Să se determine ecuația tangentei la graficul lui  $f$  în punctul de intersecție al graficului cu axa  $Ox$ .
- 5p c) Folosind monotonia funcției  $f$  să se arate că  $2^{\sqrt{3}} < 3^{\sqrt{2}}$
2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 6}$
- 5p a) Arătați că  $\int_0^1 f^2(x) dx = \frac{13}{3}$ .
- 5p b) Calculați  $\int_1^2 \frac{x-2}{f(x)} dx$ .
- 5p c) Arătați că  $\sqrt{2} \leq \int_1^2 f(x) dx \leq \sqrt{3}$ .

**Examenul național de bacalaureat 2023**
**Proba E. c)**
**Matematică M\_șt-nat**
**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**
**Simulare**
**Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii**

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

**Subiectul I**
**( 30 de puncte)**

1.	Calcul $a^2 = (\sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{2-\sqrt{3}})^2 = (\sqrt{2+\sqrt{3}})^2 - 2\sqrt{2+\sqrt{3}}\sqrt{2-\sqrt{3}} + (\sqrt{2-\sqrt{3}})^2$ Finalizare $a^2 = 4 - 2\sqrt{2^2 - (\sqrt{3})^2} = 4 - 2 = 2 \in \mathbb{N}$	3p  2p
2.	$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2m} = \frac{-2}{m}, \quad y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(16+24m)}{4m} = -\frac{4+6m}{m}, m \neq 0$ $2 = 4 + 6m \Leftrightarrow 6m = -2 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{3}$	3p  2p
3.	Condiții de existență : $\begin{cases} 1+x \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-1, \infty) \\ x \in [0, \infty) \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-1, \infty) \cap [0, \infty) \Leftrightarrow x \in [0, \infty)$ . Se ridică la puterea a doua și avem $(\sqrt{1+x})^2 = (2\sqrt{3}x)^2$ . Se obține ecuația de grad doi $12x^2 - x - 1 = 0$ cu soluțiile $x_1 = \frac{1}{3}, \quad x_2 = -\frac{1}{4}$ . Soluția ecuației este doar $x_1 = \frac{1}{3}$ . Se poate renunța la condiții de existență cu obligativitatea verificării soluțiilor.	1p  1p  3p
4.	Numărul total de cazuri este 90 Calcul nr cazuri favorabile : din cele 90 numere de 2 cifre scădem numărul de numere cu ambele cifre impare care sunt $5 \cdot 5 = 25$ și pe cele cu ambele cifre pare care sunt $4 \cdot 5 = 20$ $P = \frac{\text{număr cazuri favorabile}}{\text{număr total cazuri}} = \frac{45}{90} = \frac{1}{2}$	2p  2p  1p
5.	ABCD paralelogram înseamnă că punctul M mijlocul diagonalei AC este în același timp și mijlocul diagonalei BD. Punctul M are coordonatele $x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{2+0}{2} = 1, \quad y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{-1+3}{2} = 1$ . Pe de altă parte $x_M = \frac{x_B + x_D}{2} = 1, \quad y_M = \frac{y_B + y_D}{2} = 1$ . Se obține punctul D ( 4,2). Atunci $\overrightarrow{OD} = 4\vec{i} + 2\vec{j}$ Finalizarea cu $ \overrightarrow{OD}  = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$	2p  1p  1p  1p

6.	$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$	2p
	$\sin 3x + \sin 2x = \sin \pi + \sin \frac{2\pi}{3} = 0 + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	3p

**Subiectul II**
**( 30 de puncte)**

1.a)	$\det A(-1) = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} =$	2p
	$(-1)(-1) - 4(-4) = 1 + 16 = 17$	3p
b)	Calculul $A(2023 - a) + A(2023 + a)$	3p
	Calcul $2A(2023)$ cu finalizare	2p
c)	$A(x)A(y) = \begin{pmatrix} x & 4 \\ -4 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & 4 \\ -4 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy - 16 & 4(x+y) \\ -4(x+y) & xy - 16 \end{pmatrix}$	2p
	$2A(-8) = 2 \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ -4 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & 8 \\ -8 & -16 \end{pmatrix}$ . Se egalează cele două matrici și se obține sistemul	1p
	$\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 0 \end{cases}$ , de unde se obțin perechile $(0, 2)$ , $(2, 0)$ .	2p
2.a)	$x * 0 = x$	2p
	$0 * x = x$ Finalizare	2p 1p
b)	$x * x = \frac{8x}{4+x^2}$ . Se obține ecuația $\frac{8x}{4+x^2} = \frac{8}{5}$ , de unde $x^2 + 4 = 5x \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$	3p
	Ecuția are soluțiile 1 și 4, dar numai $x=1$ este din G	2p
c)	$f(x) * f(y) = \frac{4(f(x)+f(y))}{4+f(x)f(y)} = \frac{8\left(\frac{x-1}{x+1} + \frac{y-1}{y+1}\right)}{4+4\frac{x-1}{x+1}\frac{y-1}{y+1}} = 2\frac{(x-1)(y+1)+(y-1)(x+1)}{(x+1)(y+1)+(y-1)(x-1)}$	3p
	$= \frac{2(xy-1)}{xy+1} = f(xy)$	2p

**Subiectul III**
**( 30 de puncte)**

1.a)	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1)$ . Se calculează derivata funcției $f$	2p
	$f'(x) = (\sqrt{x})' \ln x + \sqrt{x} (\ln x)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln x + \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2 + \ln x}{2\sqrt{x}}$ ,	2p
	iar valoarea limitei este $f'(1) = \frac{1}{2}$	1p
b)	Ecuția tangentei într-un punct $(x_0, f(x_0)) \in G_f$ are forma $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$	1p
	Rezolvare ecuație $f(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$ .	2p

	Aplicarea pentru $x_0 = 1$ și avem $y = \frac{1}{2}(x-1)$	<b>2p</b>
<b>c)</b>	$f'(x) = \frac{1+2\ln x}{2\sqrt{x}}$ , $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e^{-2}$ și avem $f$ este strict descrescătoare pe $\left(0, \frac{1}{e^2}\right)$ și	<b>1p</b>
	este strict crescătoare pe $\left(\frac{1}{e^2}, \infty\right)$ , $f\left(\frac{1}{3}\right) < f\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \frac{1}{3} < \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{1}{2}$	<b>2p</b>
	$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} \ln 3 > \frac{1}{\sqrt{2}} \ln 2 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \sqrt{2} \ln 3 > \sqrt{3} \ln 2 \Leftrightarrow \ln 3^{\sqrt{2}} > \ln 2^{\sqrt{3}} \Leftrightarrow 3^{\sqrt{2}} > 2^{\sqrt{3}}$	<b>2p</b>
<b>2.a)</b>	$\int_0^1 f^2(x) dx = \int_0^1 (x^2 - 4x + 6) dx = \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 6x\right) \Big _0^1 = \frac{13}{3}$	<b>5p</b>
<b>b)</b>	Schimbarea de variabilă $\sqrt{x^2 - 4x + 6} = t$ , de unde $\frac{x-2}{\sqrt{x^2 - 4x + 6}} dx = dt$	<b>3p</b>
	Se obține $\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{2}} dt = \sqrt{2} - \sqrt{3}$	<b>2p</b>
<b>c)</b>	$f'(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2 - 4x + 6}} \Leftrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ $f$ este descrescătoare pe intervalul $[1, 2]$ și avem	<b>3p</b>
	$f(2) \leq f(x) \leq f(1), \forall x \in [1, 2]$ de unde prin integrare se obține $\int_1^2 \sqrt{2} dx \leq \int_1^2 f(x) dx \leq \int_1^2 \sqrt{3} dx$	<b>2p</b>
	$\sqrt{2} \leq \int_1^2 f(x) dx \leq \sqrt{3}$	