

Examenul național de bacalaureat 2023 – simulare județeană

Proba E. c)

Matematică M_mate-info

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore

SUBIECTUL I – Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete.

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că $\alpha^{2023} = \alpha$, unde α este soluție a ecuației $z^2 + z + 1 = 0$.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 5x + 5$. Determinați $m \in \mathbb{R}$ pentru care dreapta de ecuație $y = mx + 1$ intersectează graficul funcției în două puncte.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(4-x) - \log_{\sqrt{2}}\sqrt{x-2} = 2$.
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca alegând o funcție din mulțimea funcțiilor $f: \{0,1,2\} \rightarrow \{0,1,2,3\}$, aceasta să fie strict monotonă.
- 5p 5. Se consideră vectorii $\vec{u} = (a+1)\vec{i} - \vec{j}$ și $\vec{v} = -a\vec{i} + \vec{j}$, unde a este un număr real. Arătați că unghiul format de cei doi vectori este obtuz oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$.
- 5p 6. Se consideră triunghiul ABC în care $BC \cdot \sin C = AC \cdot \sin B$. Arătați că laturile triunghiului formează o progresie geometrică.

SUBIECTUL al II-lea – Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete.

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ bc & ac & ab \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} ax + by + cz = a \\ a^2x + b^2y + c^2z = a^2 \\ bcx + acy + abz = bc \end{cases}$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$.
- 5p a) Arătați că $\det(A(6, -2, 3)) = 0$.
- 5p b) Arătați că sistemul este compatibil determinat $\forall a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ și $a \neq b \neq c \neq a$.
- 5p c) Pentru $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$, $a \neq b = c$ arătați că sistemul admite o infinitate de soluții (x_0, y_0, z_0) pentru care $x_0 + y_0 + z_0 \in \mathbb{N}$.
2. Pe mulțimea numerelor întregi se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = 3(x+y) - xy - 6$.
- 5p a) Arătați că $2023 \circ 3 = 3$.
- 5p b) Arătați că există un număr finit de elemente simetrizabile în raport cu legea de compoziție.
- 5p c) Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuația: $\underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{x\text{-de } 2023 \text{ ori}} = 2$.

SUBIECTUL al III-lea – Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete.

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (-2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x+1}{x+2} e^x$.

- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{(x^2 + 3x + 3)e^x}{(x+2)^2}$ oricare ar fi $x \in (-2, \infty)$.
- 5p** b) Calculați $\lim_{x \rightarrow \infty} (e^{-x} \sqrt{f(2x)})^x$.
- 5p** c) Demonstrați că funcția f este inversabilă și arătați că $f'(0) \cdot (f^{-1})' \left(\frac{1}{2} \right) = 1$.

2. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 4x^3 + x$ și $g: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \ln x$.

- 5p** a) Arătați că $\int_{-1}^1 (f(-x) + 2f(x)) dx = 0$.
- 5p** b) Fie $H: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este o primitivă a funcției $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = f(x)e^{x^2}$. Arătați că orice primitivă a lui h este convexă pe \mathbb{R} .
- 5p** c) Determinați o primitivă G a funcției g cu proprietatea $G(1) = 0$.