

Examenul național de bacalaureat 2023 – simulare județeană
Proba E. c)
Matematică M_șt-nat

Filiera teoretică: profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore

SUBIECTUL I**(30 de puncte)**

- 5p** 1. Determinați numărul real x pentru care $\log_x 2023$, $[\sqrt{3} + \sqrt{2}]$ și $\sqrt[3]{125}$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice (unde $[x]$ este partea întreagă a numărului real x).
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 5x + 5$. Determinați numărul real m pentru care dreapta $y = mx + 1$ intersectează graficul funcției într-un punct cu ordonata -1 .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația: $\log_2(4-x) = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{x-2}$.
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca alegând o funcție din mulțimea funcțiilor $f: \{0,1\} \rightarrow \{0,1,2\}$, să avem $f(0) \cdot f(1) = 0$.
- 5p** 5. Se consideră vectorii $\vec{u} = (a+1)\vec{i} - \vec{j}$ și $\vec{v} = -a\vec{i} + \vec{j}$, $a \in \mathbb{R}$. Arătați că vectorii **nu** sunt coliniari indiferent de valoarea numărului real a .
- 5p** 6. Arătați că triunghiul ABC în care $\frac{a}{\sin B} = \frac{b}{\sin C} = \frac{c}{\sin A}$ este echilateral.

SUBIECTUL al II-lea**(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 0 \\ -3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $M(a) = I_3 + aA$ pentru orice număr real a .
- 5p** a) Arătați că $\det A = 0$.
- 5p** b) Arătați că $M(a) \cdot M(b) = M(a+b+2ab)$ pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$.
- 5p** c) Determinați valorile reale ale lui a pentru care matricea $M(a)$ este inversabilă și calculați $M^{-1}(-1)$.
2. Pe mulțimea numerelor întregi se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = 3 - (x-3)(y-3)$.
- 5p** a) Arătați că $2 \circ 2023 = 2023$.
- 5p** b) Determinați numerele elementele simetrizabile care sunt egale cu simetricele lor în raport cu legea de compoziție.
- 5p** c) Rezolvați în \mathbb{Z} ecuația $x \circ x \circ x = x$.

SUBIECTUL al III-lea**(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f: (-2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^x}{x+2}$.

5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{(x+1)e^x}{(x+2)^2}$.

5p b) Determinați intervalele de convexitate ale funcției f .

5p c) Determinați numerele reale a și b pentru care dreapta $d: x + ay + b = 0$ este tangentă la graficul funcției în punctul de abscisă zero.

2. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 4x^3 + x$ și $g: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = f(x) \ln x$

5p a) Arătați că $\int_{-1}^1 f(x) dx = 0$.

b) Determinați o primitivă G a lui g cu proprietatea $G(1) = 0$.

5p

5p c) Arătați că $\int_0^a f(x) dx < \int_0^b f(x) dx \quad \forall a, b \in \mathbb{R} \text{ cu } 0 < a < b$.