EXAMENUL DE BACALAUREAT 2023
Proba E.c) Matematică M_mate-info, Simulare județeană

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30 puncte)

5p **1.** Demonstraţi că $10^{\lg 2}+\sqrt[3]{-64}+\left[\frac{123}{7}\right]=15$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x.

5p **2.** Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x-1$. Demonstraţi că numărul $f(1)+f(2)+f(3)+...+f(30)$ este pătrat perfect.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2x+1+2\sqrt{2x+1}=15$.

5p **4.** Câte numere naturale de forma $\overline{ab2c}$ au suma cifrelor egală cu 5 ?

5p **5.** În triunghiul ABC, punctele M, N şi P sunt mijloacele laturilor BC, AC, respectiv AB. Arătaţi că $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}=\vec{0}$.

5p **6.** În triunghiul ABC măsurile unghiurilor A și B sunt de 45^0, respectiv 105^0 şi $AB=3\sqrt{3}$. Calculaţi lungimea laturii BC.

SUBIECTUL II (30 puncte)

1. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze $rang\ A$.

5p **b)** Să se arate că $A^n=14^{n-1}A, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **c)** Să se arate că inversa matricei I_3-A este $I_3-\frac{1}{13}A$.

2. Pe $\mathbb{R}$ considerăm legea "$\circ$" definită prin $x\circ y=5xy-30x-30y+186$, pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$. Se ştie că această lege este asociativă şi comutativă.

5p **a)** Demonstraţi că $x\circ y=5(x-6)(y-6)+6$, pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$;

5p **b)** Determinaţi un element $a\in\mathbb{R}$ pentru care $x\circ a=a\circ x=a$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$;

5p **c)** Dacă $d_1,d_2,...,d_n$ sunt divizorii întregi ai numărului 2022 calculaţi $d_1\circ d_2\circ...\circ d_n$.

SUBIECTUL III **(30 puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$.

5p **a)** Demonstraţi că ecuaţia $f'(x)=0$ are o singură soluţie în intervalul $(1,\infty)$;

5p **b)** Determinaţi intervalele de monotonie ale funcţiei f;

5p **c)** Demonstraţi că $f(\lg 99)+f(\lg 101)<f(\lg 97)+f(\lg 103)$.

2. Fie funcţia $f_{p,q}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f_{p,q}(x)=(\sin x)^p\cdot(\cos x)^q$, unde $p,q\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Demonstraţi că funcţia $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=-\frac{1}{4}\cos 2x$ este o primitivă a funcţiei $f_{1,1}$;

5p **b)** Calculaţi $\int_0^{\pi/2} f_{3,1}(x)\,dx$;

5p **c)** Fie F o primitivă a funcţiei $f_{2022,2023}$. Demonstraţi că există un număr real k astfel încât $F(x+2\pi)-F(x)=k$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

EXAMENUL DE BACALAUREAT NAȚIONAL 2023

Proba E.c) M_*mate-info*

Simulare județeană

BAREM DE NOTARE ȘI EVALUARE

Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I **(30 puncte)**

1.	$10^{\lg 2}=2$, $\sqrt[3]{-64}=-4$, $\left[\frac{123}{7}\right]=17$; Apoi obţinem concluzia.	**3p** **2p**
2.	$f(1)+f(2)+f(3)+...+f(30)=1+3+5+...+59$ $1+3+5+...+59=\frac{(1+59)\cdot 30}{2}=30^2$.	**3p** **2p**
3.	Condiția $2x+1\geq 0$ de unde $x\geq -\frac{1}{2}$ Notăm $\sqrt{2x+1}=a$, $a\geq 0$. Ecuaţia devine $a^2+2a-15=0$ cu soluţiile $a_1=3$ şi $a_2=-5$, cea din urmă nu convine. Din $\sqrt{2x+1}=3$ deducem $x=4$.	**1p** **2p** **2p**
4.	Din $a+b+2+c=5$ deducem $a+b+c=3$. Numerele sunt 3020, 2120, 2021, 1220, 1121, 1022. Sunt 6 numere.	**2p** **2p** **1p**
5.	Din regula triunghiului avem $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$ şi $\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Concluzia se obţine prin însumarea acestor relaţii.	**3p** **2p**
6.	Avem $m(\sphericalangle C)=30^0$. Teorema sinusurilor ne conduce la $\frac{AB}{\sin C}=\frac{BC}{\sin A}$, de unde $\frac{AB}{1/2}=\frac{BC}{\sqrt{2}/2}$; Obţinem $BC=3\sqrt{6}$.	**1p** **2p** **2p**

Str. Gh. Baritiu nr. 2, 330065 - DEVA, jud. HUNEDOARA
Tel: +4 (0) 254213315, +4 (0) 254215755
inspectorat@isj.hd.edu.ro, http://isj.hd.edu.ro

SUBIECTUL II **(30 puncte)**

1. a)	$rang\ A \le 3$. Din $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 0$ (linii și coloane proporționale) avem că $rang\ A \le 2$ Există $C_3^2 \cdot C_3^2 = 9$ minori de ordinul 2 și toți sunt nuli având linii, resp coloane proporționale. Deoarece $A \ne O_3$ și din cele de mai sus rezultă că $rang\ A = 1$	**3p** **1p** **1p**
1. b)	Calcul $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 14 & 28 & 42 \\ 28 & 56 & 84 \\ 42 & 84 & 126 \end{pmatrix} = 14A$ Inducție matematică: Pp că $P(k): A^k = 14^{k-1}A$ adevărată. $P(k) \to P(k+1)$, $P(k+1): A^{k+1} = 14^k A$ $A^{k+1} = A^k A = 14^{k-1}A^2 = 14^k A$. Rezultă că $A^n = 14^{n-1}A, \forall n \in \mathbb{N}^*$	**2p** **2p** **1p**
1. c)	Matricea $I_3 - \frac{1}{13}A$ este inversa matricei $I_3 - A$ dacă $(I_3 - A)\left(I_3 - \frac{1}{13}A\right) = I_3$ Prin calcul avem $(I_3 - A)\left(I_3 - \frac{1}{13}A\right) = I_3 - A - \frac{1}{13}A + \frac{1}{13}A^2 = I_3 - A - \frac{1}{13}A + \frac{14}{13}A = I_3$	**2p** **3p**
2. a)	Verificare prin calcul direct.	**5p**
2. b)	Din $x \circ a = a$ obţinem $(a-6)(5(a-6)-1) = 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Obţinem $a = 6$.	**2p** **3p**
2. c)	Pe baza criteriilor de divizibilitate cu 2 și 3, obţinem că 6 e divizor al lui 2022. Folosind proprietăţile operaţiei din enunţ obţinem $d_1 \circ d_2 \circ ... \circ d_n = 6$.	**2p** **3p**

Str. Gh. Baritiu nr. 2, 330065 - DEVA, jud. HUNEDOARA
Tel: +4 (0) 254213315, +4 (0) 254215755
inspectorat@isj.hd.edu.ro, http://isj.hd.edu.ro

SUBIECTUL III **(30 puncte)**

1. a)	Avem $f'(x)=\dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}$.	**3p**
	Soluţia unică a ecuaţiei $f'(x)=0$ este $x=2$.	**2p**
1. b)	Avem următorul tabel de variaţie x: 1 ... 2 ... ∞ $f'(x)$: $-\ -\ -\ -\ -\ -\quad 0 +\ +\ +\ +\ +\ +\ +$ $f(x)$: $\mid\ \searrow\ \searrow\ \searrow\ 4\ \nearrow\ \nearrow\ \nearrow\ \nearrow$	**3p**
	Funcţia este strict descrescătoare pe $(1,2]$ şi strict crescătoare pe $[2,\infty)$.	**2p**
1. c)	Deoarece lg97 < lg99 < 2 obţinem $f(\lg 99)<f(\lg 97)$.	**2p**
	Deoarece lg103 > lg101 > 2 obţinem $f(\lg 101)<f(\lg 103)$ şi apoi obţinem concluzia.	**3p**
2. a)	Avem $g'(x)=\dfrac{1}{2}\sin 2x$	**3p**
	$=\sin x\cos x=f_{1,1}(x)$.	**2p**
2. b)	$\int_0^{\pi/2} f_{3,1}(x)dx=\int_0^{\pi/2}(\sin x)^3\cos x dx$.	**1p**
	Prin integrarea prin părți sau schimbare de variabilă obţinem rezultatul final $\dfrac{1}{4}$.	**4p**
2. c)	Fie $h(x)=F(x+2\pi)-F(x)$. Atunci $h'(x)=f_{2022,2023}(x+2\pi)-f_{2022,2023}(x)=0$.	**4p**
	Deducem că funcţia h este constantă şi apoi concluzia.	**1p**

Str. Gh. Baritiu nr. 2, 330065 - DEVA, jud. HUNEDOARA
Tel: +4 (0) 254213315, +4 (0) 254215755
inspectorat@isj.hd.edu.ro, http://isj.hd.edu.ro