

Simulare, Bacalaureat, 17 ianuarie 2023

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de trei ore.



SUBIECTUL I

- 5p 1. Se consideră numărul complex $z = 2 - 3i$. Arătați că $z^2 - 4z + 13 = 0$.
- 5p 2. Determinați valorile reale ale lui m pentru care graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + mx + 4$ intersectează axa Ox în două puncte distincte.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\lg(x-1) + \lg(6x-5) = 2$.
- 5p 4. Determinați termenul care **nu** îl conține pe x din dezvoltarea $\left(\sqrt[3]{x} + \sqrt{\frac{2}{x}}\right)^{20}$, unde $x \in (0, \infty)$.
- 5p 5. Se consideră triunghiul ABC , punctul M mijlocul laturii BC și punctul N mijlocul segmentului AM . Demonstrați că $2\overline{AN} + \overline{BN} + \overline{CN} = \vec{0}$.
- 5p 6. Arătați că dacă $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ și $\sin x + \cos x = \cos 2x$, atunci $\sin x - \cos x = -1$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ a & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, unde a este număr întreg.
- 5p a) Arătați că $\det(A(1)) = 7$.
- 5p b) Demonstrați că rangul matricei $A(a)$ este egal cu 3, pentru orice număr întreg a .
- 5p c) Determinați numărul întreg m pentru care inversa matricei $A(m)$ are toate elementele numere întregi.
2. Pe mulțimea $M = (-10, 10)$ se definește legea de compoziție asociativă $x * y = \frac{100(x+y)}{xy+100}$.
- 5p a) Arătați că $3 * 0 = 3$.
- 5p b) Se consideră $f: M \rightarrow (0, \infty)$, $f(x) = \frac{10-x}{10+x}$. Demonstrați că $f(x * y) = f(x) \cdot f(y)$, pentru orice $x, y \in M$.
- 5p c) Determinați $x \in M$ pentru care $\underbrace{x * x * x * \dots * x}_{\text{de 2023 ori } x} = 0$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2 - x - 1$.

5p a) Calculați $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

5p b) Calculați $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{f(x)}$.

5p c) Demonstrați că $f(2\sqrt{3}) < f(3\sqrt{2})$.

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 + 2)e^{-x}$.

5p a) Calculați $\int f(x) \cdot e^x dx$.

5p b) Calculați $\int g(x) dx$, unde $g: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(\ln x)$.

5p c) Determinați numerele reale a și b , știind că funcția $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = e^{-x}(-x^2 + ax + b)$ este o primitivă a funcției f .

**Simulare, Bacalaureat, 17 ianuarie 2023
Proba E. c)**

**Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I
(30 puncte)

1.	$z^2 - 4z + 13 = (2 - 3i)^2 - 4(2 - 3i) + 13 =$ $= 4 - 12i + 9i^2 - 8 + 12i + 13 = 4 - 9 - 8 + 13 = 0$	2p 3p
2.	$f(x) = 0$ are două soluții reale distincte pentru $\Delta > 0$ $\Delta = m^2 - 16 > 0, m_1 = 4, m_2 = -4 \Rightarrow m \in (-\infty, -4) \cup (4, +\infty)$.	2p 3p
3.	Ecuația devine $\lg[(x-1)(6x-5)] = 2$, adică $(x-1)(6x-5) = 10^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow 6x^2 - 11x - 95 = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{19}{6}$ care nu convine și $x_2 = 5$ soluție.	3p 2p
4.	$T_{k+1} = C_{20}^k (\sqrt[3]{x})^{20-k} \left(\sqrt{\frac{2}{x}}\right)^k = C_{20}^k x^{\frac{20-k}{3}} 2^{\frac{k}{2}} x^{-\frac{k}{2}} = C_{20}^k 2^{\frac{k}{2}} x^{\frac{40-5k}{6}}$, unde $k \in \{0, 1, 2, \dots, 20\}$ $\frac{40-5k}{6} = 0 \Rightarrow k = 8$, deci $T_9 = C_{20}^8 2^4$ nu îl conține pe x .	3p 2p
5.	M mijlocul laturii $BC \Rightarrow 2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CN}$ N mijlocul laturii AM , deci $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{NA}$ și avem $2\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{AN} + 2\overrightarrow{NA} = \vec{0}$.	3p 2p
6.	$\sin x + \cos x = \cos 2x \Leftrightarrow \sin x + \cos x = \cos^2 x - \sin^2 x \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \sin x + \cos x = (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(\cos x - \sin x - 1) = 0$ Cum $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ atunci $\cos x - \sin x - 1 = 0$, adică $\sin x - \cos x = -1$.	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea
(30 puncte)

1. a)	$A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \det(A(1)) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$ $= 2 + 6 + 0 + 3 - 4 - 0 = 7$	3p 2p
b)	$\det(A(a)) = 11 - 4a$, pentru orice număr întreg a Cum $\det(A(a)) = 0 \Leftrightarrow a = \frac{11}{4} \notin \mathbb{Z}$, obținem $\det(A(a)) \neq 0$, pentru orice număr întreg a Deci rangul matricei $A(a)$ este egal cu 3 pentru orice număr întreg a .	2p 3p
c)	Pentru orice număr întreg m , $A(m)$ este inversabilă și $A^{-1}(m)$ are toate elementele numere întregi, $A(m) \cdot A(m)^{-1} = I_3 \Leftrightarrow \det(A(m)) = -1$ sau $\det(A(m)) = 1$, fiind numere întregi Cum m este număr întreg, obținem $m = 3$.	3p 2p
2. a)	$3 * 0 = \frac{100 \cdot (3 + 0)}{3 \cdot 0 + 100} =$ $= \frac{300}{100} = 3.$	3p 2p
b)	$f(x * y) = \frac{10 - \frac{100(x+y)}{xy+100}}{10 + \frac{100(x+y)}{xy+100}} = \frac{10xy - 100x - 100y + 1000}{10xy + 100x + 100y + 1000} = \frac{xy - 10x - 10y + 100}{xy + 10x + 10y + 100} =$ $= \frac{(x-10)(y-10)}{(x+10)(y+10)} = \frac{10-x}{10+x} \cdot \frac{10-y}{10+y} = f(x) \cdot f(y), \text{ pentru orice } x, y \in M.$	3p 2p
c)	$f\left(\underbrace{x * x * \dots * x}_{\text{de } 2023 \text{ ori } x}\right) = f(0) \Rightarrow \underbrace{f(x) \cdot f(x) \cdot \dots \cdot f(x)}_{\text{de } 2023 \text{ ori } f(x)} = f(0) \Leftrightarrow (f(x))^{2023} = 1$ $f(x) = 1 \Leftrightarrow 10 - x = 10 + x \Leftrightarrow x = 0.$	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea
(30 puncte)

1. a)	$f'(x) = (e^x)' - \left(\frac{1}{2}x^2\right)' - x' - 1' = e^x - \frac{1}{2}2x - 1 =$ $= e^x - x - 1, x \in \mathbb{R}.$	3p 2p
b)	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - x - 1}{e^x - \frac{1}{2}x^2 - x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - 1}{e^x - x - 1} =$ $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{e^x - 1} = 1.$	3p 2p
c)	$f''(x) = e^x - 1 > 0$ pentru orice $x \in (0, \infty)$, deci f' strict crescătoare pe $(0, \infty)$ și cum $f'(0) = 0$, obținem $f'(x) > 0$ pentru orice $x \in (0, \infty)$, deci f strict crescătoare pe $(0, \infty)$ și f continuă pe \mathbb{R} $0 < 2\sqrt{3} < 3\sqrt{2} \Rightarrow f(2\sqrt{3}) < f(3\sqrt{2})$.	3p 2p
2. a)	$\int f(x)e^x dx = \int (x^2 + 2)e^{-x} \cdot e^x dx = \int (x^2 + 2) dx =$ $= \frac{x^3}{3} + 2x + c, \text{ unde } c \in \mathbb{R}.$	3p 2p
b)	$\int g(x) dx = \int f(\ln x) dx = \int \frac{\ln^2 x + 2}{e^{\ln x}} dx = \int \frac{\ln^2 x + 2}{x} dx =$ $= \frac{1}{3} \ln^3 x + 2 \ln x + c, \text{ unde } c \in \mathbb{R}$	3p 2p
c)	F este o primitivă a lui $f \Rightarrow$ $F'(x) = f(x) \Rightarrow -e^{-x}(-x^2 + ax + b) + e^{-x}(-2x + a) = e^{-x}(x^2 + 2),$ pentru orice număr real x $x^2 + (-a - 2)x + a - b = x^2 + 2$, pentru orice număr real $x \Leftrightarrow a = -2$ și $b = -4$	2p 3p