Simulare, Bacalaureat, 17 ianuarie 2023
Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că numărul $A = z(2+3i) + \overline{z}(2-3i)$ este real pentru orice număr complex z, unde $\overline{z}$ este conjugatul lui z.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$. Demonstrați că funcția f este impară.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\lg(1-x)+1=\lg(7-x)$.

5p **4.** Determinați numărul funcțiilor $f:\{1,2,3\}\to\{1,2,3,4\}$ care sunt strict descrescătoare.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,-2)$, $B(-1,2)$ și $C(0,3)$. Determinați coordonatele punctului D, știind că $ABCD$ este paralelogram.

5p **6.** Lungimile laturilor unui triunghi sunt egale cu 5, 6 și 8. Arătați că triunghiul este obtuzunghic.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&3&a\\4&9&a^2\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x+y+z=1\\2x+3y+az=1\\4x+9y+a^2z=a-3\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=2$.

5p **b)** Determinați mulțimea valorilor reale ale lui a pentru care matricea $A(a)$ este inversabilă.

5p **c)** Pentru $a=4$, rezolvați sistemul de ecuații.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=4x+4y-4xy-3$.

5p **a)** Demonstrați că $x*y=1-4(x-1)(y-1)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Arătați că $x*\dfrac{1}{x}\geq 1$, pentru orice $x\in(0,\infty)$.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $x*x*x*x=x$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+3}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{(3-x)(x+1)}{(x^2+3)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $-\dfrac{1}{2}\leq f(x)\leq\dfrac{1}{6}$, pentru orice număr real x.

2. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x - x$.

5p **a)** Calculați $\int\left(x-f(x)+\ln x\right)dx$.

5p **b)** Demonstrați că orice primitivă F a funcției f este concavă pe intervalul $(1,\infty)$.

5p **c)** Determinați primitiva G a funcției $g:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=xf(x)$, al cărei grafic trece prin punctul $A\left(1,\frac{5}{12}\right)$.

Simulare, Bacalaureat, 17 ianuarie 2023
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$2-3i=\overline{2+3i}$, $A=z(2+3i)+\overline{z}\cdot\overline{2+3i}=z(2+3i)+\overline{z(2+3i)}\in\mathbb{R}$ deoarece este suma dintre un număr complex și conjugatul său.	**3p** **2p**
2.	$f(-x)=\dfrac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}=\dfrac{\frac{1}{e^x}-1}{\frac{1}{e^x}+1}=\dfrac{\frac{1-e^x}{e^x}}{\frac{1+e^x}{e^x}}=$ $=\dfrac{1-e^x}{1+e^x}=-\dfrac{e^x-1}{e^x+1}=-f(x)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, deci funcția este impară.	**3p** **2p**
3.	$\lg(1-x)-\lg(7-x)=\lg\dfrac{1-x}{7-x}=-1\Leftrightarrow\dfrac{1-x}{7-x}=\dfrac{1}{10}$, $x=\dfrac{1}{3}$, care convine.	**3p** **2p**
4.	Numărul de funcții $f:\{1,2,3\}\to\{1,2,3,4\}$ strict descrescătoare este egal cu C_4^3 $C_4^3=\dfrac{4!}{(4-3)!\cdot 3!}=4$	**3p** **2p**
5.	Mijlocul segmentului AC are coordonatele $\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ Mijlocul segmentului BD are coordonatele $\left(\dfrac{x_D-1}{2},\dfrac{y_D+2}{2}\right)$ $\dfrac{x_D-1}{2}=-\dfrac{1}{2},\dfrac{y_D+2}{2}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow x_D=0,y_D=-1\Rightarrow D(0,-1)$.	**2p** **3p**
6.	Considerăm triunghiul ABC cu $AB=5$, $AC=6$ și $BC=8$ $\Rightarrow\cos A=\dfrac{5^2+6^2-8^2}{2\cdot5\cdot6}=-\dfrac{1}{20}$ $\Rightarrow\cos A<0$, deci unghiul A este obtuz.	**3p** **2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. a)	$A(1)=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&3&1\\4&9&1\end{pmatrix} \Rightarrow \det\left(A(1)\right)=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&3&1\\4&9&1\end{vmatrix}=$ $=3+4+18-2-12-9=2$	**2p** **3p**
b)	$A(a)$ este inversabilă $\Leftrightarrow \det\left(A(a)\right)\neq 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}1&1&1\\2&3&a\\4&9&a^2\end{vmatrix}=a^2-5a+6=(a-2)(a-3)$, pentru orice număr real a $A(a)$ este inversabilă $\Leftrightarrow a\neq 2$ și $a\neq 3$.	**3p** **2p**
c)	Pentru $a=4$, $\det\left(A(4)\right)=2\neq 0$, deci sistemul este Cramer Soluția sistemului este $(3,-3,1)$.	**2p** **3p**
2. a)	$x*y=1-4xy+4x+4y-4=1-4x(y-1)+4(y-1)=$ $=1-4(x-1)(y-1)$, pentru orice numere reale x și y.	**3p** **2p**
b)	$x*\frac{1}{x}=1-4(x-1)(\frac{1}{x}-1)=1-4(x-1)\frac{1-x}{x}=$ $=1+\frac{4(x-1)^2}{x}\geq 1$, pentru orice $x\in(0,\infty)$	**3p** **2p**
c)	$x*x=1-4(x-1)^2, x*x*x=1+4^2(x-1)^3$, $x*x*x*x=1-4^3(x-1)^4$, pentru x număr real $(x-1)\left(1+4^3(x-1)^3\right)=0$, deci $x=\frac{3}{4}$ sau $x=1$.	**3p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. a)	$f'(x)=\frac{(x-1)'(x^2+3)-(x-1)(x^2+3)'}{(x^2+3)^2}=\frac{1\cdot(x^2+3)-(x-1)\cdot 2x}{(x^2+3)^2}=$ $=\frac{3+2x-x^2}{(x^2+3)^2}=\frac{(3-x)(x+1)}{(x^2+3)^2}, x\in\mathbb{R}.$	**3p** **2p**

b)	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-1}{x^2+3}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x}}{x\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}=$ $=0$, dreapta de ecuație $y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul lui f	**3p** **2p**
c)	$f'(x)=0$ pentru $x=-1$ sau $x=3$, $f'(x)\le 0$ pentru orice $x\in(-\infty,-1]\cup[3,\infty)\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $x\in(-\infty,-1]\cup[3,\infty)$ și $f'(x)\ge 0$, pentru orice $x\in[-1,3]\Rightarrow f$ crescătoare pe $x\in[-1,3]$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$, $f(-1)=-\frac{1}{2}$, $f(3)=\frac{1}{6}$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$, f continuă pe $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\Rightarrow -\frac{1}{2}\le f(x)\le\frac{1}{6}$, $x\in\mathbb{R}$	**3p** **2p**
2. a)	$\int\left(x-f(x)+\ln x\right)dx=\int 2x dx=$ $=2\frac{x^2}{2}+c=x^2+c$, unde $c\in\mathbb{R}$.	**2p** **3p**
b)	$F'(x)=f(x)$, $F''(x)=f'(x)$ unde F este o primitivă a lui f, $x>0$. $f'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}<0$, pentru orice $x>1\Rightarrow F''(x)<0$ pentru orice $x>1$, adică F este concavă pe intervalul $(1,\infty)$.	**2p** **3p**
c)	$G(x)=\int xf(x)dx=\int\left(x\ln x-x^2\right)dx=\int\left(\frac{x^2}{2}\right)'\ln x dx-\int x^2 dx=$ $=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{3}+c$, unde $c\in\mathbb{R}$ $G(x)=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{3}+c$, $G(1)=-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+c=-\frac{7}{12}+c\Rightarrow-\frac{7}{12}+c=\frac{5}{12}$, $c=1$ $G(x)=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{3}+1$ este primitiva căutată.	**2p** **3p**