

Simulare, Bacalaureat, 17 ianuarie 2023
Proba E. c)
Matematică M_tehnologic

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de trei ore.


SUBIECTUL I

- | | |
|-----------|--|
| 5p | 1. Arătați că $\left(2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2\right) : \frac{17}{9} = 1$. |
| 5p | 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4x + a$, unde a este un număr real. Arătați că pentru orice număr real a , $f(2) - f(-2) = 16$. |
| 5p | 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{x^2+3} = 3^{4x}$. |
| 5p | 4. Prețul unui obiect este 120 lei. Determinați prețul obiectului după ce se scumpește de două ori, succesiv, cu 5%. |
| 5p | 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,7)$, $B(5,1)$. Determinați distanța de la punctul O la punctul C , unde C este mijlocul segmentului AB . |
| 5p | 6. Calculați aria triunghiului ABC , știind că $AB = AC = 5$ și $m(\sphericalangle B) = 45^\circ$. |

SUBIECTUL al II-lea
(30 de puncte)

- | | |
|-----------|--|
| | 1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. |
| 5p | a) Arătați că $\det A = -6$. |
| 5p | b) Determinați numerele reale x , știind că $\det(A - xI_2) = -1$. |
| 5p | c) Determinați numerele reale a și b pentru care $A \cdot X = X \cdot A$, unde $X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$. |
| | 2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = xy - x - y + 2$. |
| 5p | a) Demonstrați că $x * y = (x-1)(y-1) + 1$, pentru orice numere reale x și y . |
| 5p | b) Arătați că legea de compoziție „*” este asociativă pe mulțimea numerelor reale. |
| 5p | c) Determinați numerele naturale nenule n pentru care $n * n * n = n$. |

SUBIECTUL al III-lea
(30 de puncte)

- | | |
|-----------|---|
| | 1. Se consideră funcția $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2 \ln x$. |
| 5p | a) Arătați că $f'(x) = \frac{2(x-1)(x+1)}{x}$, $x \in (0, +\infty)$. |
| 5p | b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A(1,1)$. |
| 5p | c) Demonstrați că $\ln \frac{2}{3} \leq -\frac{5}{18}$. |
| | 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x - x^2}{e^x}$. |
| 5p | a) Calculați $\int f(x) e^x dx$. |
| 5p | b) Demonstrați că funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{x^2}{e^x}$ este o primitivă a funcției f . |
| 5p | c) Demonstrați că orice primitivă F a funcției f este crescătoare pe $[0, 2]$. |

Simulare, Bacalaureat, 17 ianuarie 2023
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I
(30 de puncte)

1.	$\left(2 - \frac{1}{9}\right) : \frac{17}{9} = \frac{18-1}{9} : \frac{9}{17} =$ $= \frac{17}{9} : \frac{9}{17} = 1$	3p
		2p
2.	$f(2) = 8 + a$ $f(-2) = -8 + a \Rightarrow f(2) - f(-2) = 8 + a - (-8 + a) = 16$, pentru orice număr real a	2p
		3p
3.	$x^2 + 3 = 4x \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$ $x = 1$ sau $x = 3$	3p
		2p
4.	După prima scumpire cu 5%, prețul obiectului este de $120 + \frac{5}{100} \cdot 120 = 126$ lei După a doua scumpire cu 5%, prețul obiectului este $126 + \frac{5}{100} \cdot 126 = 132,3$ lei	2p
		3p
5.	Punctul C , mijlocul segmentului AB , are coordonatele $x_C = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1+5}{2} = 3$, $y_C = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{7+1}{2} = 4 \Rightarrow C(3,4)$ $OC = \sqrt{(3-0)^2 + (4-0)^2} = 5$	3p
		2p
6.	$AB = AC = 5 \Rightarrow \Delta ABC$ este isoscel $\Rightarrow m(\sphericalangle B) = m(\sphericalangle C) = 45^\circ \Rightarrow \Delta ABC$ este dreptunghic în A $A_{\Delta ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2} = 12,5$	2p
		3p

SUBIECTUL al II-lea
(30 de puncte)

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - 3 \cdot 3 =$ $= 3 - 9 = -6$	3p 2p
b)	$A - xI_2 = \begin{pmatrix} 1-x & 3 \\ 3 & 3-x \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A - xI_2) = \begin{vmatrix} 1-x & 3 \\ 3 & 3-x \end{vmatrix} = x^2 - 4x - 6, \text{ pentru orice număr real } x$ $x^2 - 4x - 6 = -1 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ sau } x = 5$	2p 3p
c)	$A \cdot X = \begin{pmatrix} 2+3a & 1+3b \\ 6+3a & 3+3b \end{pmatrix}, X \cdot A = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ a+3b & 3a+3b \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2+3a & 1+3b \\ 6+3a & 3+3b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ a+3b & 3a+3b \end{pmatrix}, \text{ de unde obținem } a=1 \text{ și } b=\frac{8}{3}.$	2p 3p
2.a)	$x * y = xy - x - y + 1 + 1 =$ $x(y-1) - (y-1) + 1 = (x-1)(y-1) + 1, \text{ pentru orice numere reale } x \text{ și } y.$	2p 3p
b)	$(x * y) * z = ((x-1)(y-1) + 1) * z = [(x-1)(y-1) + 1 - 1](z-1) + 1 = (x-1)(y-1)(z-1) + 1,$ <p>pentru orice numere reale x, y și z.</p> $x * (y * z) = x * ((y-1)(z-1) + 1) = (x-1)[(y-1)(z-1) + 1 - 1] + 1 = (x-1)(y-1)(z-1) + 1 =$ $= (x * y) * z, \text{ pentru orice numere reale } x, y \text{ și } z, \text{ deci legea de compoziție este asociativă pe } \mathbb{R}.$	2p 3p
c)	$n * n * n = (n * n) * n = ((n-1)(n-1) + 1) * n = [(n-1)^2 + 1 - 1](n-1) + 1 = (n-1)^3 + 1$ $n * n * n = n \Leftrightarrow (n-1)^3 - (n-1) = 0 \Leftrightarrow n(n-1)(n-2) = 0, \text{ și cum } n \text{ este număr natural nenul,}$ <p>obținem $n=1$ sau $n=2$.</p>	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea
(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = x^{2'} - 2 \ln x' = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2(x^2 - 1)}{x} =$ $= \frac{2(x-1)(x+1)}{x}, \text{ pentru orice } x \in (0, \infty)$	3p 2p
b)	$f(1) = 1 \text{ și } f'(1) = 0$ <p>ecuația tangentei este $y - f(1) = f'(1)(x-1)$, adică $y - 1 = 0$</p>	2p 3p
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1, f \text{ este descrescătoare pe } (0, 1], f \text{ crescătoare pe } [1, \infty) \text{ și } f \text{ continuă}$ $f(x) \geq f(1) \Rightarrow f(x) \geq 1 \text{ oricare ar fi } x \in (0, \infty).$ <p>Pentru $x = \frac{2}{3} \Rightarrow f\left(\frac{2}{3}\right) \geq 1 \Rightarrow \frac{4}{9} - 2 \ln \frac{2}{3} \geq 1 \Rightarrow \ln \frac{2}{3} \leq -\frac{5}{18}$</p>	2p 3p
2.a)	$\int f(x) e^x dx = \int \frac{2x - x^2}{e^x} e^x dx = \int 2x - x^2 dx =$ $= 2 \int x dx - \int x^2 dx = 2 \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} = x^2 - \frac{x^3}{3} + c, c \in \mathbb{R}$	3p 2p

b)	$g'(x) = \frac{(x^2)' e^x - x^2 (e^x)'}{(e^x)^2} = \frac{(2x - x^2)e^x}{e^{2x}} = \frac{2x - x^2}{e^x} =$ $= f(x), \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R} \text{ și } g \text{ derivabilă, deci funcția } g \text{ este o primitivă a funcției } f.$	3p 2p
c)	<p>Fie $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o primitivă a funcției $f \Rightarrow F'(x) = f(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$</p> $F'(x) = \frac{2x - x^2}{e^x} = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ sau } x = 2$ $F'(x) \geq 0, \text{ pentru orice } x \in [0, 2], \text{ deci orice primitivă a funcției } f \text{ este crescătoare pe } [0, 2].$	3p 2p