



Examenul național de bacalaureat 2023

Proba E. c)

Matematică M\_tehnologic

Simulare

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Se consideră numărul complex  $z = 1 + i$ ,  $i^2 = -1$ . Arătați că  $z^2 - 2z = -2$ .
- 5p 2. Fie funcția  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ , dată prin  $f(k) = \begin{cases} k - 1, & \text{dacă } k \text{ este par} \\ k^2 - 3, & \text{dacă } k \text{ este impar} \end{cases}$ . Calculați  $f(f(46)) - 2022$ .
- 5p 3. Rezolvați ecuația  $\ln(4 - x) = \ln 4 - \ln x$ .
- 5p 4. Un șofer are de efectuat o cursă pe o distanță de 250 de km cu o mașină care consumă 8 litri de combustibil la 100 de km. Prețul unui litru de combustibil este de 7 lei. Aflați cât l-a costat cursa în final, dacă firma i-a decontat 25% din contravaloarea combustibilului consumat.
- 5p 5. În sistemul cartezian de coordonate  $xOy$  se consideră punctele  $A(3, 5)$  și  $B(5, 1)$ . Calculați distanța de la  $O$  la  $M$ , unde  $M$  este mijlocul segmentului  $[AB]$ .
- 5p 6. Arătați că  $\sin 2x - \cos x = 0$  știind că  $\sin x = \frac{1}{2}$ .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  și, pentru orice  $n$  număr natural, definim  $A_n = nP + (n + 1)Q$ .
- 5p a) Arătați că  $\det A_2 = 6$ .
- 5p b) Arătați că  $PQ = QP = O_2$ ,  $P^2 = P$  și  $Q^2 = Q$ .
- 5p c) Calculați  $A_2 \cdot A_3 \cdot A_4 \cdot \dots \cdot A_{2022}$ .
2. Pe mulțimea  $[0, \infty)$  definim legea de compoziție „ $*$ ” prin  $x * y = \frac{3^y + x}{xy + 3}$ .
- 5p a) Arătați că  $12 * 3 = 1$ .
- 5p b) Rezolvați ecuația  $2^x * 0 = 3$ .
- 5p c) Calculați  $\left(\left(\left(\left(6 * 5\right) * 4\right) * 3\right) * 2\right) * 1$ .



SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dată prin  $f(x) = (1-x)e^x$ .
- 5p a) Arătați că  $f'(x) = -xe^x$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p b) Determinați punctul de extrem al funcției  $f$ .
- 5p c) Arătați că pentru orice  $k \in (0, 1)$ , ecuația  $f(x) = k$  are exact două soluții reale.
2. Pentru orice număr real  $a$ , definim funcția  $f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  prin  $f_a(x) = x^2 - ax + a^2$ .
- 5p a) Arătați că  $\int_0^3 f_0(x) dx = 9$ .
- 5p b) Arătați că  $\int_1^e (f_0(x) \cdot \ln x) dx = \frac{2e^3 + 1}{9}$ .
- 5p c) Determinați valoarea minimă pentru  $\int_0^2 f_a(x) dx$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .

**Examenul național de bacalaureat 2023**

**Proba E. c)**

**Matematică M\_tehnologic**

**Soluții și barem de notare**

**Simulare**

*Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

**1.** Calculăm membrul stâng  $(z^2 - 2z)$ :

$$z = 1 + i \Rightarrow z^2 = (1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i \dots\dots\dots 2p$$

$$2z = 2(1 + i) = 2 + 2i \dots\dots\dots 1p$$

$$z^2 - 2z = 2i - (2 + 2i) = 2i - 2 - 2i = -2 \dots\dots\dots 2p$$

**Soluție alternativă 1**

$$z = 1 + i \Rightarrow z - 1 = i \Rightarrow (z - 1)^2 = i^2 \Rightarrow \dots\dots\dots 2p$$

$$\Rightarrow z^2 - 2z + 1 = -1 \Rightarrow z^2 - 2z = -1 - 1 \Rightarrow z^2 - 2z = -2 \dots\dots\dots 3p$$

**Soluție alternativă 2**

$$z = 1 + i \Rightarrow \bar{z} = 1 - i. \text{ Dar } z \text{ și } \bar{z} \text{ sunt soluțiile ecuației } x^2 - (z + \bar{z})x + z\bar{z} = 0 \dots\dots\dots 2p$$

$$z + \bar{z} = 1 + i + 1 - i = 2, \text{ iar } z\bar{z} = (1 + i)(1 - i) = 1^2 - i^2 = 1 + 1 = 2 \dots\dots\dots 2p$$

$$\text{Prin urmare, } z \text{ verifică ecuația } x^2 - 2x + 2 = 0, \text{ deci } z^2 - 2z = -2 \dots\dots\dots 1p$$

**2.** 46 fiind număr par, avem  $f(46) = 46 - 1 \Rightarrow f(46) = 45 \dots\dots\dots 2p$

Deoarece  $45 = f(46)$  este număr impar, avem

$$f(45) = f(f(46)) = 45^2 - 3 \Rightarrow f(f(46)) = 2025 - 3 \Rightarrow f(f(46)) = 2022 \dots\dots\dots 2p$$

$$\text{Finalizare: } f(f(46)) - 2022 = 2022 - 2022 = 0 \dots\dots\dots 1p$$

**Soluție alternativă**

$$\text{Avem } f(f(k)) = \begin{cases} f(k) - 1, & f(k) \text{ este par} \\ f^2(k) - 3, & f(k) \text{ este impar} \end{cases} \dots\dots\dots 1p$$

$f(k)$  este par pentru  $k$  impar și  $f(k)$  este impar pentru  $k$  număr par.....1p

Cu acestea, avem  $f(f(k)) = \begin{cases} k^2 - 4, & k \text{ este impar} \\ (k-1)^2 - 3, & k \text{ este par} \end{cases}$  .....1p

Deci,  $f(f(46)) = (46-1)^2 - 3 = 45^2 - 3 = 2025 - 3 = 2022$  .....1p

Finalizare:  $f(f(46)) - 2022 = 2022 - 2022 = 0$  .....1p

**3.** Impunem condițiile de existență pentru cei doi logaritmi și obținem mulțimea admisibilă a soluțiilor:

$$\begin{cases} 4-x > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 4 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow x \in (0, 4)$$
 .....1p

Avem apoi

$$\ln(4-x) = \ln 4 - \ln x \Leftrightarrow \ln(4-x) = \ln \frac{4}{x} \stackrel{\text{inj}}{\Leftrightarrow} 4-x = \frac{4}{x} \Leftrightarrow$$
 .....2p

$$\Leftrightarrow 4x - x^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow$$
 .....1p

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \in (0, 4)$$
 .....1p

**Observația 1.** Ecuația poate fi rezolvată fără a impune condițiile de existență pentru cei doi logaritmi. În acest caz, prezumtivele soluții obținute în urma rezolvării ecuației date, trebuie **verificate obligatoriu** în ecuația inițială.

**Observația 2.** Ecuația  $\ln(4-x) = \ln 4 - \ln x$  poate fi prelucrată și altfel. De exemplu:

$$\ln(4-x) = \ln 4 - \ln x \Leftrightarrow \ln(4-x) + \ln x = \ln 4 \Leftrightarrow \ln[x(4-x)] \stackrel{\text{inj}}{=} \ln 4 \Leftrightarrow$$

$$\stackrel{\text{inj}}{\Leftrightarrow} 4x - x^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \in (0, 4).$$

**Observația 3.** Ecuația  $4-x = \frac{4}{x}$ , pentru  $x \in (0, 4)$ , se poate rescrie  $x + \frac{4}{x} = 4$ . Aplicând inegalitatea dintre mediile aritmetică și geometrică, avem

$$\frac{x + \frac{4}{x}}{2} \geq \sqrt{x \cdot \frac{4}{x}} \Leftrightarrow x + \frac{4}{x} \geq 2\sqrt{4} \Leftrightarrow x + \frac{4}{x} \geq 4.$$

Deoarece avem egalitatea în inegalitatea mediilor, rezultă  $x = \frac{4}{x} \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2$  deoarece  $x \in (0, 4)$ .

**4.** Pentru a parcurge cei 250 de km, mașina consumă 20 de litri de combustibil.....1p

Cei 20 de litri de combustibil costă  $20 \cdot 7 = 140$  de lei.....1p

Firma a decontat  $\frac{25}{100} \cdot 140 = 35$  de lei.....2p

În final, cursa l-a costat pe șofer  $140 - 35 = 105$  lei.....1p



5. Aflăm întâi coordonatele punctului  $M$  (utilizând formula pentru coordonatele mijlocului unui segment) apoi aflăm lungimea segmentului  $OM$  (utilizând formula distanței dintre două puncte în plan).

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow x_M = \frac{3+5}{2} \Rightarrow x_M = 4 \dots\dots\dots 1p$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow y_M = \frac{5+1}{2} \Rightarrow y_M = 3 \dots\dots\dots 1p$$

$$OM = \sqrt{(x_M - x_O)^2 + (y_M - y_O)^2} \Rightarrow \dots\dots\dots 1p$$

$$\Rightarrow OM = \sqrt{(4-0)^2 + (3-0)^2} \Rightarrow OM = \sqrt{4^2 + 3^2} \Rightarrow \dots\dots\dots 1p$$

$$\Rightarrow OM = \sqrt{16+9} \Rightarrow OM = \sqrt{25} \Rightarrow OM = 5 \dots\dots\dots 1p$$

6.  $\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow 2 \sin x = 1 \Rightarrow 2 \sin x - 1 = 0 \dots\dots\dots 1p$

$\sin 2x = 2 \sin x \cos x \dots\dots\dots 1p$

$\sin 2x - \cos x = 2 \sin x \cos x - \cos x = \cos x (2 \sin x - 1) \dots\dots\dots 2p$

Cum  $2 \sin x - 1 = 0$ , rezultă că avem  $\cos x (2 \sin x - 1) = \cos x \cdot 0 = 0 \dots\dots\dots 1p$

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

1. a)  $A_n = nP + (n + 1)Q \Rightarrow A_2 = 2P + 3Q \Rightarrow \dots\dots\dots 1p$

$\Rightarrow A_2 = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \dots\dots\dots 2p$

$\det A_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 0 \cdot 1 = 6 \dots\dots\dots 2p$

1. b)  $PQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ -1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & -1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2 \dots\dots\dots 1p$

$QP = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) & 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) & 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2 \dots\dots\dots 1p$

$P^2 = P \cdot P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \\ -1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) & -1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = P \dots\dots\dots 2p$

$Q^2 = Q \cdot Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = Q \dots\dots\dots 1p$

1. c)  $A_2 \cdot A_3 \cdot A_4 \cdot \dots \cdot A_{2022} = (2P + 3Q)(3P + 4Q)(4P + 5Q) \dots (2022P + 2023Q) \dots\dots\dots 1p$

Produsele de forma  $P^k \cdot Q^p$ ,  $k, p \in \{1, 2, 3, \dots, 2020\}$ ,  $k + p = 2021$ , sunt egale cu  $O_2 \dots\dots\dots 1p$

$P^2 = P \Rightarrow P^k = P$ , pentru orice  $k = \overline{3, 2021}$ ,  $Q^2 = Q \Rightarrow Q^p = Q$ , pentru orice  $p = \overline{3, 2021} \dots 1p$



$$A_2 \cdot A_3 \cdot A_4 \cdot \dots \cdot A_{2022} = (2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2022)P + (3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 2023)Q = 2022!P + \frac{2023!}{2}Q = \dots\dots\dots 1p$$

$$= \begin{pmatrix} 2022! & 0 \\ -2022! & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{2023!}{2} & \frac{2023!}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2022! & 0 \\ \frac{2023!}{2} - 2022! & \frac{2023!}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2022! & 0 \\ \frac{2021 \cdot 2022!}{2} & \frac{2023!}{2} \end{pmatrix} \dots\dots\dots 1p$$

2. a)  $12 * 3 = \frac{3^3 + 12}{12 \cdot 3 + 3} = \dots\dots\dots 2p$

$$= \frac{27 + 12}{36 + 3} = \dots\dots\dots 2p$$

$$= \frac{39}{39} = 1 \dots\dots\dots 1p$$

2. b)  $2^x * 0 = 3 \Leftrightarrow \frac{3^0 + 2^x}{2^x \cdot 0 + 3} = 3 \Leftrightarrow \dots\dots\dots 2p$

$$\Leftrightarrow \frac{1 + 2^x}{0 + 3} = 3 \Leftrightarrow \dots\dots\dots 1p$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2^x = 3 \cdot 3 \Leftrightarrow 1 + 2^x = 9 \Leftrightarrow 2^x = 9 - 1 \Leftrightarrow 2^x = 8 \Leftrightarrow \dots\dots\dots 1p$$

$$\Leftrightarrow 2^x = 2^3 \Leftrightarrow x = 3 \dots\dots\dots 1p$$

2. c) Observăm că  $\alpha * 1 = \frac{3^1 + \alpha}{\alpha \cdot 1 + 3} = \frac{3 + \alpha}{3 + \alpha} = 1$ , pentru orice  $\alpha \in [0, \infty)$ .....3p

Apoi,  $\underbrace{\left(\left(\left(\left(6 * 5\right) * 4\right) * 3\right) * 2\right) * 1}_{a} = \left(\left(\left(\left(6 * 5\right) * 4\right) * 3\right) * 2\right) * 1 = a * 1 = 1 \dots\dots\dots 2p$

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

1. a) Funcția  $f$  este derivabilă pe  $\mathbb{R}$  deoarece este un produs de două funcții derivabile (polinomială și exponențială).

$$f'(x) = \left[ (1-x) \cdot e^x \right]' = (1-x)' \cdot e^x + (1-x) \cdot (e^x)' = \dots\dots\dots 2p$$

$$= (1' - x')e^x + (1-x)e^x = (0-1)e^x + (1-x)e^x = -e^x + (1-x)e^x = \dots\dots\dots 2p$$

$$= (-1+1-x)e^x = -xe^x, \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R} \dots\dots\dots 1p$$

1. b) Știm că pentru funcțiile derivabile, punctele de extrem local se află printre zerourile derivatei. Reciproca nu este însă adevărată.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -xe^x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ (} e^x > 0, \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R} \text{)} \dots\dots\dots 1p$$

$$f'(x) > 0 \text{ pentru orice } x \in (-\infty, 0) \text{ și } f'(x) < 0 \text{ pentru orice } x \in (0, \infty) \dots\dots\dots 2p$$

Deoarece  $f$  este strict crescătoare pe intervalul  $(-\infty, 0]$  și strict descrescătoare pe intervalul

$[0, \infty)$ , rezultă că punctul  $x_0 = 0$  este punct de maxim (chiar global).....**2p**

1. c) Vom construi tabelul de variație asociat funcției  $f$  utilizând și informațiile obținute la punctele anterioare.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1-x)e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-x}{e^{-x}} \stackrel{l'H}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(1-x)'}{(e^{-x})'} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{-e^{-x}} = \frac{-1}{-\infty} = 0 \dots\dots\dots \mathbf{1p}$$

$$f(0) = 1; \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (1-x)e^x = -\infty \cdot \infty = -\infty \dots\dots\dots \mathbf{2p}$$

Tabelul de variație asociat funcției  $f$  este:

$x$	$-\infty$	$0$	$\infty$
$f'(x)$	+ + + + + + + + +	0	- - - - - - - - -
$f(x)$	0	1 $M$	$-\infty$

Fie  $k \in (0, 1)$ , arbitrar.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \\ f \text{ strict crescătoare pe } (-\infty, 0] \\ f(0) = 1 \\ f \text{ continuă pe } (-\infty, 0] \end{array} \right\} \Rightarrow \text{există și este unic } \alpha \in (-\infty, 0) \text{ astfel încât } f(\alpha) = k \dots\dots\dots \mathbf{1p}$$

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = 1 \\ f \text{ strict descrescătoare pe } [0, \infty) \\ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty \\ f \text{ continuă pe } [0, \infty) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{există și este unic } \beta \in (0, \infty) \text{ astfel încât } f(\beta) = k \dots\dots\dots \mathbf{1p}$$

**Concluzia:** pentru orice  $k \in (0, 1)$ , ecuația  $f(x) = k$  are exact două soluții reale, una strict negativă, cealaltă strict pozitivă.

2. a) Avem

$$\int_0^3 f_0(x) dx = \int_0^3 (x^2 - 0 \cdot x + 0^2) dx = \int_0^3 x^2 dx = \dots\dots\dots \mathbf{2p}$$

$$= \frac{x^3}{3} \Big|_0^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{0^3}{3} = 9 \dots\dots\dots \mathbf{3p}$$



2. b) Avem

$$\int_1^e (f_0(x) \cdot \ln x) dx = \int_1^e x^2 \cdot \ln x dx = \int_1^e \left(\frac{x^3}{3}\right)' \cdot \ln x dx = \dots\dots\dots 2p$$

$$= \frac{x^3}{3} \cdot \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3} \cdot (\ln x)' dx = \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3} \int_1^e x^2 dx = \dots\dots\dots 2p$$

$$= \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_1^e = \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3} \left(\frac{e^3}{3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2e^3 + 1}{9} \dots\dots\dots 1p$$

2. c) Vom calcula întâi integrala definită apoi vom utiliza forma canonică a funcției de gradul II:

$$\int_0^2 f_a(x) dx = \int_0^2 (x^2 - ax + a^2) dx = \left(\frac{x^3}{3} - a \frac{x^2}{2} + a^2 x\right) \Big|_0^2 = \dots\dots\dots 2p$$

$$= \frac{8}{3} - 2a + 2a^2 = \dots\dots\dots 1p$$

$$= 2 \left(a^2 - a + \frac{4}{3}\right) = 2 \left[\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{13}{12}\right] = 2 \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{13}{6} \geq \frac{13}{6}, \text{ pentru orice } a \in \mathbb{R} \dots\dots\dots 2p$$

**Concluzie:** minimul este egal cu  $\frac{13}{6}$  obținut pentru  $a = \frac{1}{2}$ .