

EXAMENUL NAȚIONAL PENTRU DEFINITIVARE ÎN ÎNVĂȚĂMÂNTUL PREUNIVERSITAR
19 iulie 2023

Probă scrisă
MATEMATICĂ

Model

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de patru ore.

SUBIECTUL I

(60 de puncte)

1. Se consideră x_1 și x_2 , soluțiile ecuației $(m-1)x^2 - 2mx + m - 2 = 0$, unde m este număr real, $m \neq 1$.
- 7p a) Arătați că $x_1 + x_2 + 2x_1x_2 = 4$, pentru orice număr real m , $m \neq 1$.
- 8p b) Demonstrați că **nu** există niciun număr real m pentru care $x_1, x_2 \in (-2, 1)$.
2. Se consideră dreptunghiul $ABCD$, cu $AB = 5\sqrt{3}$ cm, $BC = 5$ cm și punctul O , intersecția diagonalelor AC și BD . Perpendiculara în O pe dreapta BD intersectează dreptele AB și AD în punctele E , respectiv F .
- 7p a) Arătați că aria patrulaterului $AFBC$ este egală cu $25\sqrt{3}$ cm².
- 8p b) Determinați măsura unghiului format de dreptele AC și DE .
3. Se consideră x_1, x_2 și x_3 rădăcinile polinomului $f = X^3 + X^2 + aX + 1$, unde a este număr real.
- 7p a) Demonstrați că, pentru orice număr real nenul a , $\frac{1}{x_1^3 + x_1^2 + 1} + \frac{1}{x_2^3 + x_2^2 + 1} + \frac{1}{x_3^3 + x_3^2 + 1} = 1$.
- 8p b) Determinați numerele întregi a pentru care polinomul f are o rădăcină număr întreg.
4. Se consideră funcția $f : (-3, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln \frac{x+5}{x+3}$.
- 7p a) Arătați că $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2 \ln n - (f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(n))) = \ln 20$.
- 8p b) Determinați numerele întregi p, q și r pentru care suprafața plană delimitată de graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$ are aria egală cu $p \ln 2 + q \ln 3 + r \ln 5$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

Următoarea secvență face parte din programa școlară de matematică pentru clasa a VII-a.

Competențe specifice și exemple de activități de învățare

Clasa a VII-a
1.2. Identificarea unei situații date rezolvabile prin ecuații sau sisteme de ecuații liniare <ul style="list-style-type: none">- Recunoașterea unor relații matematice care reprezintă ecuații- Identificarea necunoscutelor, coeficienților, termenilor liberi ai unei ecuații- Furnizarea unor exemple de relații matematice care reprezintă ecuații sau sisteme de ecuații liniare- Identificarea și notarea datelor cunoscute și a datelor necunoscute în cazul problemelor care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor sau sistemelor de ecuații
2.2. Utilizarea regulilor de calcul cu numere reale pentru verificarea soluțiilor unor ecuații sau sisteme de ecuații liniare <ul style="list-style-type: none">- Verificarea, prin calcul, că un număr dintr-o enumerare este soluție a unei ecuații- Verificarea, prin calcul, a soluției unui sistem de ecuații liniare- Verificarea, prin calcul, că un număr real este soluție comună a unor ecuații
3.2. Utilizarea transformărilor echivalente în rezolvarea unor ecuații și sisteme de ecuații liniare <ul style="list-style-type: none">- Aducerea unor egalități la o formă mai simplă prin transformări echivalente- Aplicarea transformărilor pentru obținerea unor sisteme de ecuații liniare echivalente- Utilizarea probei pentru justificarea unui rezultat obținut

4.2. Redactarea rezolvării ecuațiilor și sistemelor de ecuații liniare

- Rezolvarea unor ecuații de forma $ax + b = 0$, unde $a, b \in \mathbb{R}$
- Utilizarea metodelor de rezolvare a sistemelor de ecuații liniare (metoda reducerii și metoda substituției)
- Verificarea validității unei soluții a unei ecuații sau a unui sistem de ecuații

5.2. Stabilirea unor metode de rezolvare a ecuațiilor sau a sistemelor de ecuații liniare

- Utilizarea transformărilor echivalente a ecuațiilor pentru fundamentarea unei metode de rezolvare
- Evidențierea unor soluții asociate unei ecuații liniare în cadrul unui sistem de ecuații (de exemplu, observarea faptului că fiecare dintre ecuațiile unui sistem de ecuații liniare are mai multe soluții)
- Compararea metodelor de rezolvare a unor sisteme de ecuații liniare

6.2. Transpunerea matematică a unor situații date, utilizând ecuații și/sau sisteme de ecuații liniare

- Transpunerea relațiilor cuprinse într-o situație dată sub formă de ecuații
- Rezolvarea unor probleme având conținut practic, utilizând ecuații sau sisteme de ecuații liniare
- Utilizarea estimărilor pentru încadrarea într-un ordin de mărime a soluției unei ecuații

[...]

Domeniu de conținut	Conținuturi
Algebră	2. ECUAȚII ȘI SISTEME DE ECUAȚII LINIARE <ul style="list-style-type: none">• Transformarea unei egalități într-o egalitate echivalentă; identități• Ecuații de forma $ax + b = 0$, unde $a, b \in \mathbb{R}$; mulțimea soluțiilor unei ecuații; ecuații echivalente• Sisteme de două ecuații liniare cu două necunoscute; rezolvare prin metoda substituției și/sau prin metoda reducerii• Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor sau a sistemelor de ecuații liniare

Notă: Conținuturile vor fi abordate din perspectiva competențelor specifice. Activitățile de învățare sugerate oferă o imagine posibilă privind contextele de formare/dezvoltare a acestor competențe.

(Programa școlară pentru disciplina Matematică, OMEN nr. 3393/28.02.2017)

Pentru o evaluare la finalul unității de învățare „**Ecuații și sisteme de ecuații liniare**”, folosind informațiile din secvența de mai sus, elaborați trei itemi: un *item cu răspuns scurt*, un *item de tip alegere multiplă* și un *item de tip întrebare structurată*.

În elaborarea itemilor veți avea în vedere următoarele aspecte:

- menționarea competenței specifice evaluate;
- menționarea activității de învățare în cadrul căreia ați utiliza acest item;
- respectarea formatului fiecărui tip de item elaborat;
- elaborarea răspunsului așteptat (baremul de evaluare);
- corectitudinea științifică a informației de specialitate.

EXAMENUL NAȚIONAL PENTRU DEFINITIVARE ÎN ÎNVĂȚĂMÂNTUL PREUNIVERSITAR
19 iulie 2023

Probă scrisă
MATEMATICĂ

Model

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

- Se punctează orice modalitate de rezolvare corectă a cerințelor, în limita punctajului maxim corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(60 de puncte)

1.	a) $x_1 + x_2 = \frac{2m}{m-1}$	3p	
	$x_1 x_2 = \frac{m-2}{m-1} \Rightarrow x_1 + x_2 + 2x_1 x_2 = \frac{2m+2m-4}{m-1} = \frac{4(m-1)}{m-1} = 4$, pentru orice număr real m , $m \neq 1$	4p	
	b) Dacă $x_1, x_2 \in (-2, 1)$, atunci $-3 < 2x_1 + 1 < 3$ și $-3 < 2x_2 + 1 < 3$ $(2x_1 + 1)(2x_2 + 1) < 9 \Rightarrow 4x_1 x_2 + 2x_1 + 2x_2 + 1 < 9$ Obținem $x_1 + x_2 + 2x_1 x_2 < 4$, ceea ce este fals	3p 3p 2p	
2.	a) FO este mediatoarea segmentului $BD \Rightarrow \triangle DFB$ este isoscel și, cum unghiul ADB are măsura egală cu 60° , obținem că $\triangle DFB$ este echilateral $BA \perp DF$, deci A este mijlocul lui $DF \Rightarrow AF = 5$ cm $AFBC$ paralelogram, deci $\mathcal{A}_{AFBC} = AB \cdot BC = 25\sqrt{3}$ cm ²	3p 2p 2p	
	b) $AFBC$ paralelogram, deci $AC \parallel FB$ $BA \perp DF$, $FO \perp BD$ și $\{E\} = BA \cap FO \Rightarrow E$ este ortocentrul $\triangle DFB$ $DE \perp FB$, deci unghiul format de dreptele AC și DE are măsura de 90°	2p 3p 3p	
	3.	a) $x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = a$, $x_1 x_2 x_3 = -1$ $\frac{1}{x_1^3 + x_1^2 + 1} + \frac{1}{x_2^3 + x_2^2 + 1} + \frac{1}{x_3^3 + x_3^2 + 1} = \frac{1}{-ax_1} + \frac{1}{-ax_2} + \frac{1}{-ax_3} = \frac{x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3}{-ax_1 x_2 x_3} = 1$, pentru orice număr real nenul a	4p 3p
	b) $f \in \mathbb{Z}[X]$ și, cum polinomul f are o rădăcină număr întreg, aceasta este -1 sau 1 Dacă $f(-1) = 0$, obținem $a = 1$, care convine Dacă $f(1) = 0$, obținem $a = -3$, care convine	4p 2p 2p	
4.	a) $2 \ln n - (f(1) + f(2) + \dots + f(n)) = \ln n^2 - \ln \left(\frac{6}{4} \cdot \frac{7}{5} \cdot \frac{8}{6} \cdot \dots \cdot \frac{n+3}{n+1} \cdot \frac{n+4}{n+2} \cdot \frac{n+5}{n+3} \right) = \ln \frac{20n^2}{(n+5)(n+4)}$	4p	
	$\lim_{n \rightarrow +\infty} (2 \ln n - (f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(n))) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \frac{20n^2}{(n+5)(n+4)} = \ln 20$	3p	

$\text{b) } \mathcal{A} = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \ln \frac{x+5}{x+3} dx = x \ln \frac{x+5}{x+3} \Big _0^1 + \int_0^1 \frac{2x}{(x+3)(x+5)} dx =$	2p
$= \ln \frac{3}{2} - 3 \ln(x+3) \Big _0^1 + 5 \ln(x+5) \Big _0^1 = \ln(2^{-2} \cdot 3^9 \cdot 5^{-5})$	2p
$\ln(2^{-2} \cdot 3^9 \cdot 5^{-5}) = \ln(2^p \cdot 3^q \cdot 5^r) \Rightarrow 2^{-2} \cdot 3^9 \cdot 5^{-5} = 2^p \cdot 3^q \cdot 5^r \text{ și, cum } p, q \text{ și } r \text{ sunt numere}$ întregi, obținem $p = -2, q = 9$ și $r = -5$	4p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

<p><i>Itemul cu răspuns scurt elaborat:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - menționarea competenței specifice evaluate 2p - menționarea activității de învățare în cadrul căreia acest item poate fi utilizat 2p - respectarea formatului itemului 2p - elaborarea răspunsului așteptat (baremul de evaluare) 2p - corectitudinea științifică a informației de specialitate 2p 	
<p><i>Itemul de tip alegere multiplă elaborat:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - menționarea competenței specifice evaluate 2p - menționarea activității de învățare în cadrul căreia acest item poate fi utilizat 2p - respectarea formatului itemului 2p - elaborarea răspunsului așteptat (baremul de evaluare) 2p - corectitudinea științifică a informației de specialitate 2p 	
<p><i>Itemul de tip întrebare structurată elaborat:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - menționarea competenței/competențelor specifice evaluate 2p - menționarea activității de învățare în cadrul căreia acest item poate fi utilizat 2p - respectarea formatului itemului 2p - elaborarea răspunsului așteptat (baremul de evaluare) 2p - corectitudinea științifică a informației de specialitate 2p 	