

CONCURSUL NAȚIONAL DE OCUPARE A POSTURILOR DIDACTICE/CATEDRELOR  
VACANTE/REZERVATE DIN ÎNVĂȚĂMÂNTUL PREUNIVERSITAR

12 iulie 2023  
Probă scrisă  
MATEMATICĂ

Model

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de patru ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

	1. Se consideră expresia $E(z) = \frac{z}{z^2 + 3z + 1}$ , unde $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ .
5p	a) Determinați numerele $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ pentru care $E(z) = \frac{1}{3}$ .
5p	b) Arătați că, pentru orice $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ cu proprietatea $ z  = 1$ , numărul $E(z)$ este real.
5p	c) Demonstrați că, dacă $E(z)$ este număr real, atunci $ z  = 1$ .
	2. Se consideră triunghiul $ABC$ , dreptunghic în $A$ . Bisectoarele $BM$ și $CN$ , cu $M \in AC$ , $N \in AB$ , ale unghiurilor $ABC$ , respectiv $ACB$ , se intersectează în $I$ . Punctul $P$ este mijlocul segmentului $MN$ și punctul $D$ este situat pe $BC$ astfel încât $MD \perp BC$ .
5p	a) Arătați că semidreapta $MB$ este bisectoarea unghiului $AMD$ .
5p	b) Demonstrați că $AI = DI$ .
5p	c) Demonstrați că dreptele $PI$ și $BC$ sunt perpendiculare.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

	1. Se consideră numărul natural $n$ , $n \geq 2$ și $(G, \circ)$ un grup cu proprietatea că $x^n = e$ , pentru orice $x \in G$ , unde $e$ este elementul neutru al grupului $(G, \circ)$ și $x^k = \underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{\text{de } k \text{ ori } x}$ , $k \in \mathbb{N}^*$ .
5p	a) Arătați că, dacă $x \in G$ , atunci simetricul lui $x$ în raport cu legea de compoziție „ $\circ$ ” este $x^{n-1}$ .
5p	b) Demonstrați că, dacă $n = 2$ , atunci grupul $(G, \circ)$ este comutativ.
5p	c) Se consideră $f: \mathbb{Q} \rightarrow G$ , un morfism de la grupul $(\mathbb{Q}, +)$ la grupul $(G, \circ)$ . Arătați că $f(x) = e$ , pentru orice număr rațional $x$ .
	2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , $f(x) = x + \ln \frac{x^2 + 1}{x^2 + 2}$ .
5p	a) Arătați că $f'(x) = 1 + \frac{2x}{(x^2 + 1)(x^2 + 2)}$ , $x \in \mathbb{R}$ .
5p	b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției $f$ , care este paralelă cu asimptota oblică spre $+\infty$ la graficul funcției $f$ .
5p	c) Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ , se notează cu $S_n$ aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , $g(x) = f(x) - x + \ln(x^2 + 2)$ , axa $Ox$ și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = n$ . Demonstrați că $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{n} S_n \right) = +\infty$ .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

Următoarea secvență face parte din programa școlară de matematică pentru clasa a VIII-a.

Competențe specifice și exemple de activități de învățare

Clasa a VIII-a	
<b>1.1. Recunoașterea apartenenței unui număr real la o mulțime</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Reprezentarea pe axa numerelor a intervalelor de numere reale</li> <li>- Reprezentarea pe axa numerelor a intervalelor făcând legătura între tipurile de intervale și submulțimile drepte</li> <li>- Identificarea apartenenței unui element la o mulțime definită printr-o proprietate a elementelor ei</li> </ul>
<b>2.1. Efectuarea unor operații cu intervale numerice reprezentate pe axa numerelor sau cu mulțimi definite printr-o proprietate a elementelor ei</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Reprezentarea pe axa numerelor a intersecției a două intervale</li> <li>- Reprezentarea pe axa numerelor a reuniunii a două intervale cu intersecția nevidă</li> <li>- Verificarea faptului că un număr este soluția unei inecuații</li> <li>- Verificarea apartenenței unui obiect la o mulțime pe baza unei/unor proprietăți a/ale elementelor acesteia</li> </ul>
<b>3.1. Utilizarea unor procedee matematice pentru operații cu intervale și rezolvarea inecuațiilor în <math>\mathbb{R}</math></b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Aproximarea numerelor reale pentru reprezentarea unor intervale</li> <li>- Reprezentarea unui interval sub forme echivalente (notație, reprezentarea pe axa numerelor)</li> <li>- Transformarea unei inecuații într-o inecuație echivalentă folosind proprietățile relației de ordine</li> </ul>
<b>4.1. Folosirea terminologiei aferente noțiunilor de mulțime, de interval numeric și de inecuații</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Utilizarea terminologiei specifice intervalelor de numere reale în contexte interdisciplinare</li> <li>- Rezolvarea unei inecuații de forma <math> ax + b  &lt; c</math> (<math>\leq</math>), unde <math>a \in \mathbb{R}^*</math>, <math>b, c \in \mathbb{R}</math></li> <li>- Selectarea, dintr-o mulțime dată, a elementelor care verifică o condiție suplimentară</li> </ul>
<b>5.1. Interpretarea unei situații date utilizând intervale și inecuații</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Rezolvarea unor inecuații de forma <math>ax + b &lt; 0</math>, (<math>&gt;</math>, <math>\leq</math>, <math>\geq</math>), unde <math>a \in \mathbb{R}^*</math>, <math>b \in \mathbb{R}</math></li> <li>- Descrierea mulțimii soluțiilor unei probleme printr-o proprietate care le caracterizează</li> <li>- Rezolvarea de inecuații de forma <math>\frac{a}{bx + c} &lt; 0</math>, (<math>&gt;</math>, <math>\leq</math>, <math>\geq</math>), unde <math>a, b \in \mathbb{R}^*</math>, <math>c \in \mathbb{R}</math></li> </ul>
<b>6.1. Rezolvarea unor situații date, utilizând intervale numerice sau inecuații</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Estimarea erorii unui calcul aproximativ cu numere reale</li> <li>- Utilizarea de estimări pentru a compara/ordona numere reale în diferite contexte</li> <li>- Modelarea unei situații concrete utilizând inecuații studiate</li> <li>- Interpretarea soluțiilor unei inecuații în rezolvarea unor probleme concrete</li> </ul>

[...]

Domeniu de conținut	Conținuturi
<b>Mulțimi. Numere</b>	<b>1. INTERVALE DE NUMERE REALE. INECUAȚII ÎN <math>\mathbb{R}</math></b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Mulțimi definite printr-o proprietate comună a elementelor lor</li> <li>• Intervale numerice și reprezentarea lor pe axa numerelor; intersecția și reuniunea intervalelor</li> <li>• Inecuații de forma <math>ax + b \geq 0</math>, (<math>\leq, &lt;, &gt;</math>), unde <math>a, b \in \mathbb{R}</math></li> </ul>

**Notă:** Conținuturile vor fi abordate din perspectiva competențelor specifice. Activitățile de învățare sugerate oferă o imagine posibilă privind contextele de formare/dezvoltare a acestor competențe.

(Programa școlară pentru disciplina Matematică, OMEN nr. 3393/28.02.2017)

Folosind informațiile din secvența de mai sus, în vederea evaluării formării/dezvoltării competențelor specifice precizate, elaborați o probă de evaluare la finalul unității de învățare „Intervale de numere reale. Inecuații în  $\mathbb{R}$ ”, care să cuprindă cinci itemi: un item de completare, un item cu răspuns scurt, un item de tip alegere multiplă, un item de tip întrebare structurată și un item de tip rezolvare de probleme.

Pentru fiecare item propus:

- menționați competența specifică evaluată;
- menționați activitatea de învățare în cadrul căreia ați utiliza acest item;
- precizați un avantaj al utilizării acestui tip de item;
- precizați un dezavantaj al utilizării acestui tip de item;
- respectați formatul tipului de item;
- respectați corectitudinea științifică, inclusiv a răspunsului așteptat.

CONCURSUL NAȚIONAL DE OCUPARE A POSTURILOR DIDACTICE/CATEDRELOR  
VACANTE/REZERVATE DIN ÎNVĂȚĂMÂNTUL PREUNIVERSITAR  
12 iulie 2023

Probă scrisă  
MATEMATICĂ

Model

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

- Se punctează orice modalitate de rezolvare corectă a cerințelor, în limita punctajului maxim corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	a) $\frac{z}{z^2 + 3z + 1} = \frac{1}{3}$ , deci $z^2 + 1 = 0$	3p
	$z_1 = i, z_2 = -i$ , care convin	2p
	b) $ z  = 1$ , deci $z\bar{z} = 1$ , de unde obținem $\bar{z} = \frac{1}{z}$	2p
	$\overline{E(z)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}^2 + 3\bar{z} + 1} = \frac{\frac{1}{z}}{\frac{1}{z^2} + \frac{3}{z} + 1} = \frac{z}{z^2 + 3z + 1} = E(z)$ , deci $E(z) \in \mathbb{R}$ , pentru orice $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ cu proprietatea $ z  = 1$	3p
2.	c) $E(z) \in \mathbb{R} \Rightarrow E(z) = \overline{E(z)} \Rightarrow \frac{z}{z^2 + 3z + 1} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}^2 + 3\bar{z} + 1} \Rightarrow \bar{z}^2 \cdot z + 3z \cdot \bar{z} + z = z^2 \cdot \bar{z} + 3\bar{z} \cdot z + \bar{z}$	2p
	$\bar{z} \cdot z(\bar{z} - z) + (z - \bar{z}) = 0 \Rightarrow (\bar{z} \cdot z - 1)(\bar{z} - z) = 0$ și, cum $\bar{z} \neq z$ , obținem $\bar{z} \cdot z = 1$ , deci $ z  = 1$	3p
	a) Semidreapta $BM$ este bisectoarea $\sphericalangle ABC \Rightarrow \sphericalangle ABM \equiv \sphericalangle DBM$	2p
	Cum unghiurile $ABM$ și $AMB$ sunt complementare și unghiurile $DBM$ și $DMB$ sunt complementare, obținem $\sphericalangle AMB \equiv \sphericalangle DMB$ , deci semidreapta $MB$ este bisectoarea unghiului $AMD$	3p
	b) Semidreapta $BM$ este bisectoarea $\sphericalangle ABC$ , $MA \perp AB$ și $MD \perp BC$ , deci $MA = MD$ $\triangle AMI \equiv \triangle DMI$ , deoarece $AM = DM$ , $MI = MI$ și $\sphericalangle AMI \equiv \sphericalangle DMI$ , deci $AI = DI$	2p 3p
	c) Pentru $E \in BC$ astfel încât $NE \perp BC$ obținem că $\triangle ANI \equiv \triangle ENI$ , deci $AI = EI$ , de unde obținem $EI = DI$ , deci $IQ \perp BC$ , unde punctul $Q$ este mijlocul segmentului $DE$	3p
	$PQ$ este linie mijlocie în trapezul $DMNE$ , deci $PQ \parallel MD \Rightarrow PQ \perp BC$ , de unde obținem că punctele $P, I$ și $Q$ sunt coliniare, deci $PI \perp BC$	2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.	a) $x \circ x^{n-1} = x \circ \underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{\text{de } n-1 \text{ ori } x} = \underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{\text{de } n \text{ ori } x} = x^n = e$ , pentru orice $x \in G$	2p
	$x^{n-1} \circ x = \underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{\text{de } n-1 \text{ ori } x} \circ x = \underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{\text{de } n \text{ ori } x} = x^n = e$ , pentru orice $x \in G$ , deci $x^{n-1}$ este simetricul lui $x$ în raport cu legea de compoziție „ $\circ$ ”	3p

	<p><b>b)</b> <math>x^2 = e</math>, pentru orice <math>x \in G</math>, deci <math>(x \circ y)^2 = e</math>, pentru orice <math>x, y \in G</math>  <math>x \circ y \circ x \circ y = e \Rightarrow x^2 \circ y \circ x \circ y = x \circ e \Rightarrow y \circ x \circ y = x \Rightarrow x \circ y = y \circ x</math>, pentru orice <math>x, y \in G</math>,                  deci grupul <math>(G, \circ)</math> este comutativ</p>	<p><b>2p</b> <b>3p</b></p>
	<p><b>c)</b> <math>x \in \mathbb{Q} \Rightarrow f(x) = f\left(n \cdot \frac{x}{n}\right) = f\left(\underbrace{\frac{x}{n} + \frac{x}{n} + \dots + \frac{x}{n}}_{\text{de } n \text{ ori } \frac{x}{n}}\right) = \underbrace{f\left(\frac{x}{n}\right) \circ f\left(\frac{x}{n}\right) \circ \dots \circ f\left(\frac{x}{n}\right)}_{\text{de } n \text{ ori } f\left(\frac{x}{n}\right)} = \left(f\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n</math></p> <p>Cum <math>f\left(\frac{x}{n}\right) \in G \Rightarrow \left(f\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n = e</math>, deci <math>f(x) = e</math>, pentru orice număr rațional <math>x</math></p>	<p><b>3p</b> <b>2p</b></p>
<p><b>2.</b></p>	<p><b>a)</b> <math>f'(x) = \left(x + \ln(x^2 + 1) - \ln(x^2 + 2)\right)' = 1 + \frac{2x}{x^2 + 1} - \frac{2x}{x^2 + 2} =</math>  <math>= 1 + 2x \left(\frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{x^2 + 2}\right) = 1 + \frac{2x}{(x^2 + 1)(x^2 + 2)}, x \in \mathbb{R}</math></p>	<p><b>3p</b> <b>2p</b></p>
	<p><b>b)</b> <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \ln \frac{x^2 + 1}{x^2 + 2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \ln \frac{x^2 + 1}{x^2 + 2}\right) = 1</math>, deci panta asimptotei oblice spre <math>+\infty</math> la graficul funcției <math>f</math> este egală cu 1</p> <p><math>f'(a) = 1 \Leftrightarrow a = 0</math> și, cum <math>f(0) = \ln \frac{1}{2}</math>, obținem că <math>y = x + \ln \frac{1}{2}</math> este ecuația tangentei la graficul funcției <math>f</math>, care este paralelă cu asimptota oblică spre <math>+\infty</math> la graficul funcției <math>f</math></p>	<p><b>2p</b> <b>3p</b></p>
	<p><b>c)</b> <math>g(x) = \ln(x^2 + 1) \Rightarrow S_n = \int_0^n  g(x)  dx = \int_0^n \ln(x^2 + 1) dx = x \ln(x^2 + 1) \Big _0^n - \int_0^n \frac{2x^2}{x^2 + 1} dx =</math>  <math>= n \ln(n^2 + 1) - 2n + 2 \arctg n</math>, deci <math>\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} S_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\ln(n^2 + 1) - 2 + \frac{2}{n} \arctg n\right) = +\infty</math></p>	<p><b>2p</b> <b>3p</b></p>

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

<p><i>Itemul de completare elaborat:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- menționarea competenței specifice evaluate <b>1p</b></li> <li>- menționarea activității de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat <b>1p</b></li> <li>- precizarea unui avantaj al utilizării acestui tip de item <b>1p</b></li> <li>- precizarea unui dezavantaj al utilizării acestui tip de item <b>1p</b></li> <li>- respectarea formatului itemului <b>1p</b></li> <li>- respectarea corectitudinii științifice, inclusiv a răspunsului așteptat <b>1p</b></li> </ul>	
<p><i>Itemul cu răspuns scurt elaborat:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- menționarea competenței specifice evaluate <b>1p</b></li> <li>- menționarea activității de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat <b>1p</b></li> <li>- precizarea unui avantaj al utilizării acestui tip de item <b>1p</b></li> <li>- precizarea unui dezavantaj al utilizării acestui tip de item <b>1p</b></li> <li>- respectarea formatului itemului <b>1p</b></li> <li>- respectarea corectitudinii științifice, inclusiv a răspunsului așteptat <b>1p</b></li> </ul>	

<i>Itemul de tip alegere multiplă elaborat:</i> <ul style="list-style-type: none"><li>- menționarea competenței specifice evaluate</li><li>- menționarea activității de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat</li><li>- precizarea unui avantaj al utilizării acestui tip de item</li><li>- precizarea unui dezavantaj al utilizării acestui tip de item</li><li>- respectarea formatului itemului</li><li>- respectarea corectitudinii științifice, inclusiv a răspunsului așteptat</li></ul>	<b>1p</b> <b>1p</b> <b>1p</b> <b>1p</b> <b>1p</b> <b>1p</b>
<i>Itemul de tip întrebare structurată elaborat:</i> <ul style="list-style-type: none"><li>- menționarea competenței/competențelor specifice evaluate</li><li>- menționarea activității de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat</li><li>- precizarea unui avantaj al utilizării acestui tip de item</li><li>- precizarea unui dezavantaj al utilizării acestui tip de item</li><li>- respectarea formatului itemului</li><li>- respectarea corectitudinii științifice, inclusiv a răspunsului așteptat</li></ul>	<b>1p</b> <b>1p</b> <b>1p</b> <b>1p</b> <b>1p</b> <b>1p</b>
<i>Itemul de tip rezolvare de probleme elaborat:</i> <ul style="list-style-type: none"><li>- menționarea competenței specifice evaluate</li><li>- menționarea activității de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat</li><li>- precizarea unui avantaj al utilizării acestui tip de item</li><li>- precizarea unui dezavantaj al utilizării acestui tip de item</li><li>- respectarea formatului itemului</li><li>- respectarea corectitudinii științifice, inclusiv a răspunsului așteptat</li></ul>	<b>1p</b> <b>1p</b> <b>1p</b> <b>1p</b> <b>1p</b> <b>1p</b>