**SIMULARE EXAMEN BACALAUREAT**
**Matematică M_mate-info, decembrie 2022**
**Clasa a XII-a** **Simulare**

***Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică***
***Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică***
**• Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
**• Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

## *Subiectul I* *(30 puncte)*

| | | |
|---|---|---|
| **1.** | **5p** | Determinați $x \in \mathbb{R}$, știind că numerele $x-1$, $x+3$, $4-2x$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice. |
| **2.** | **5p** | Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+(m+1)x+4$ ., unde m $\in \mathbb{R}$ . Determinați numerele reale m , știind că vârful parabolei associate funcției f se află pe axa Ox. |
| **3.** | **5p** | Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x+2}=x$ . |
| **4.** | **5p** | Calculați probabilitatea ca, alegând un număr oarecare de trei cifre ,produsul cifrelor acestuia sa fie par. |
| **5.** | **5p** | În reperul cartezian $xOy$ se consideră vectorii $\overrightarrow{MN}=4\vec{i}+3\vec{j}$ și $\overrightarrow{NP}=2\vec{i}-5\vec{j}$. Determinați numerele reale $m\ si\ n$ , știind că $\overrightarrow{MP}=(m+2)\vec{i}+(n-1)\vec{j}$ |
| **6.** | **5p** | Arătați că $(1+ctg^2x)sin^2x-(1+tg^2x)cos^2x=0$ , $pentru\ orice\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. |

## *Subiectul al II-lea* *(30 puncte)*

**1.** Fie matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1&1&1\\a+2&1&-1\\1&1&-a\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{R})$ si sistemul de ecuații $\begin{cases}x+y+z=3\\(a+2)x+y-z=0\\x+y-az=-1\end{cases}$, $a\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Arătați că $\det A(0)=1$ .

5p **b)** Determinați numărul real $a$ pentru care $\det\left(A(a)\right)=0$ .

5p **c)** Determinați numărul real $a$ , știind că sistemul are soluție unică $(x_0;y_0;z_0)$ și $4\frac{x_0}{z_0}+y_0=0$.

**2.** Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=2xy+x+y$ .

5p **a)** Demonstrați că $x*y=2\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(y+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}$, pentru orice numere reale $x$ și $y$ .

5p **b)** Determinați numărul real $x$ pentru care $x*x*x=0$ .

5p **c)** Aflați numărul real pozitiv $a$ , știind că $f(x*y)=f(x)+f(y)$ pentru orice numere reale $x$ și $y$ , unde $f:\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)\to\mathbb{R}, f(x)=ln\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{a}\right)$.

***Subiectul al III-lea*** ***(30 de puncte)***

**1.** Se consideră funcția $f:(-3;\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=e^x-ln(x+3)$.

**5p** ***a)*** Arătați că $f'(x)=e^x-\frac{1}{x+3}, x\in(-3,\infty)$.

**5p** ***b)*** Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x+2}$.

**5p** ***c)*** Demonstrați că funcția f este convexă pe $(-3;\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:(-1;\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x+\frac{3}{x+1}$.

**5p** ***a)*** Arătați că $\int_0^1(f(x)-x)dx=3ln2$.

**5p** ***b)*** Calculați $\int_e^{e^2}\left(f(x)-\frac{3}{x+1}\right)lnxdx$.

**5p** ***c)*** Arătați că $\int_0^1 2f(x)F(x)dx=\frac{1}{4}+ln8+9ln^2 2$, unde F este primitiva funcției f pentru care F(0)=0.

**Examenul de bacalaureat naţional 2023**
**Proba E. c)**
**Matematică M_mate-info**
**BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE simulare decembrie 2022**

***Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică***
***Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică***

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

**Subiectul I** ***(30 puncte)***

| | | |
|---|---|---|
| **1** | $x-1$ , $x+3$ , $4-2x$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice $\Rightarrow x+3=\frac{(x-1)+(4-2x)}{2}$<br><br>$2x+6=x-1+4-2x \Rightarrow 3x=-3 \Rightarrow x=-1$ | **2p**<br><br>**3p** |
| **2** | $V(x_V,y_V) \in Ox \Leftrightarrow y_V=0 \Leftrightarrow \Delta=0$<br><br>$\Delta=b^2-4ac=0 \Rightarrow (m+1)^2-16=0 \Rightarrow (m+1)^2=16$<br><br>$m_1=3$ , $m_2=-5$ | **2p**<br><br>**3p** |
| **3** | $\sqrt{x+2}=x$ , $x\geq 0$<br><br>$x+2=x^2$, $x^2-x-2=0$ , $x=-1$ , $x=2$<br><br>$Soluție$ $x=2$ care convine. | **2p**<br><br>**3p** |
| **4** | $P=\frac{Nr.cazuri\ favorabile}{Nr.cazuri\ posibile}$ , Avem 900 numere de 3 cifre ( cazuri posibile )<br><br>Sunt $5^3=125$ $numere\ de\ 3\ cifre\ cu\ produsul\ cifrelor\ nr.impar.$<br><br>Avem $900-125=775$ $numere\ de\ 3\ cifre\ cu\ produsul\ cifrelor\ nr.par$<br><br>$P=\frac{Nr.cazuri\ favorabile}{Nr.cazuri\ posibile}=\frac{775}{900}=\frac{31}{36}$ | **2p**<br><br>**3p** |
| **5** | $\overrightarrow{MN}=4\vec{i}+3\vec{j}$ și $\overrightarrow{NP}=2\vec{i}-5\vec{j}$.<br><br>$\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}=4\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{i}-5\vec{j}.=6\vec{i}-2\vec{j}$<br><br>$\overrightarrow{MP}=(m+2)\vec{i}+(n-1)\vec{j}$ deci $m+2=6$ $si$ $n-1=-2$ | **2p**<br><br>**3p** |

| | | |
|---|---|---|
| | $m = 4\,, n = -1$ | |
| 6 | $tg^2x = \frac{sin^2x}{cos^2x}\,,\; ctg^2x = \frac{cos^2x}{sin^2x}\,,$<br>$(1 + ctg^2x)sin^2x - (1 + tg^2x)cos^2x = 0$ rezultă<br>$\left(1 + \frac{cos^2x}{sin^2x}\right)sin^2x - \left(1 + \frac{sin^2x}{cos^2x}\right)cos^2x = 0$<br>$\left(\frac{sin^2x + cos^2x}{sin^2x}\right)sin^2x - \left(\frac{cos^2x + sin^2x}{cos^2x}\right)cos^2x = 0\; pentru\; orice\; x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$ | 3p<br><br><br><br>2p |

*Subiectul al II-lea* *(30 puncte)*

| | | |
|---|---|---|
| 1a | $A(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$<br>$det\big(A(0)\big) = 1 \cdot 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 0 - 1 \cdot 1 \cdot (-1) = 1$ | 2p<br><br><br>3p |
| 1b | $det\big(A(a)\big) = a^2 + 2a + 1 = (a+1)^2$<br>$det\big(A(0)\big) = 0 \Leftrightarrow a + 1 = 0 \Leftrightarrow a = -1$ | 3p<br>2p |
| 1c | Sistemul are soluție unică $(x_0; y_0; z_0)$ pentru $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ și soluția sistemului este $\left(\frac{-3a+5}{(a+1)^2}; \frac{3a^2+5a-6}{(a+1)^2}; \frac{4}{a+1}\right)$<br>$4\frac{x_0}{z_0} + y_0 = 0 \Leftrightarrow 4 \cdot \frac{-3a+5}{(a+1)^2} \cdot \frac{a+1}{4} + \frac{3a^2+5a-6}{(a+1)^2} = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{7}$ | 3p<br><br><br>2p |
| 2a | $x * y = 2xy + x + y + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$<br>$= 2x\left(y + \frac{1}{2}\right) + \left(y + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(y + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}$ pentru orice numere reale $x$ și $y$ . | 2p<br><br>3p |
| 2b | $x * x = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}$<br>$x * x * x = 4\left(x + \frac{1}{2}\right)^3 - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} \Leftrightarrow x = 0$ | 2p<br><br><br>3p |

| | | |
|---|---|---|
| 2c | $f(x*y) = ln\left(\frac{x*y+\frac{1}{2}}{a}\right) = ln\left(\frac{2\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(y+\frac{1}{2}\right)}{a}\right)$ | 2p |
| | $f(x)+f(y) = ln\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{a}\right) + ln\left(\frac{y+\frac{1}{2}}{a}\right) = ln\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(y+\frac{1}{2}\right)}{a^2} \Leftrightarrow$ $\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(y+\frac{1}{2}\right)}{a^2} = \frac{2\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(y+\frac{1}{2}\right)}{a} \Leftrightarrow 2a = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$ | 3p |

***Subiectul al III-lea*** ***30 puncte***

| | | |
|---|---|---|
| 1.a | $f'(x) = (e^x)' - (\ln(x+3))' =$ | 2p |
| | $= e^x - \frac{(x+3)'}{x+3} = e^x - \frac{1}{x+3}, x \in (-3,\infty).$ | 3p |
| 1b | $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{x+2} = \lim\limits_{x\to\infty} e^x = +\infty$ | 2p |
| | $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(x+3)}{x+2} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x+3} = 0.$ | 2p |
| | $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x+2} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{e^x}{x+2} - \frac{\ln(x+3)}{x+2}\right) = +\infty.$ | 1p |
| 1c | $f''(x) = e^x + \frac{1}{(x+3)^2}, \quad x \in (-3,\infty).$ | 2p |
| | $f''(x) \geq 0$, deci funcția f este convexă pe $(-3,\infty)$. | 3p |
| 2a | $\int_0^1 (f(x) - x)dx = \int_0^1 \frac{3}{x+1}dx = 3\ln(x+1)\Big\|_0^1 =$ | 3p |
| | $= 3\ln 2 - 3\ln 1 = 3\ln 2$ | 2p |
| 2b | $\int_e^{e^2}\left(f(x) - \frac{3}{x+1}\right)lnxdx = \int_e^{e^2} xlnxdx = \frac{x^2}{2}lnx\Big\|_e^{e^2} - \int_e^{e^2}\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx =$ | 3p |
| | $=\frac{e^4}{2}lne^2 - \frac{e^2}{2}lne - \int_e^{e^2}\frac{x}{2}dx = e^4 - \frac{e^2}{2} - \frac{x^2}{4}\Big\|_e^{e^2} = \frac{3e^4 - e^2}{4}$ | 2p |
| 2c | F este primitivă a lui f și F(0)=0, deci F: $(-\mathbf{1};\infty) \to \mathbb{R}$, $F(x) = \frac{x^2}{2} + 3\ln(x+1)$ | 2p |
| | $\int_0^1 2f(x)F(x)dx = \int_0^1 2F'(x)F(x)dx = F^2(x)\Big\|_0^1 = \frac{1}{4} + ln8 + 9ln^2 2$ | 3p |

**Echipa de profesori:**
**Apostol Mihai (Liceul Teoretic ” Horia Hulubei” Măgurele )**
**Prutescu Daniel (Liceul German ”Hermann Oberth” Voluntari)**
**Hlevca Cristina ( Liceul Teoretic ”Ioan Petruș” Otopeni)**
**Cosmescu Ana-Maria (Școala Gimnazială Nr. 190 București)**
**Moraru Daniela – Inspector ISJ Ilfov**