SIMULARE EXAMEN BACALAUREAT
Matematică M_ Științe ale naturii, decembrie 2022

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete. Se acordă 10 puncte din oficiu.**

SUBIECTUL I *(30 de puncte)*

5p 1. Fie numerele complexe $z_1 = 2 - 5i$ și $z_2 = 3 + 4i$. Arătați că numărul $w = z_1^2 + 5z_2$ este număr real.

5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3x + 2$. Determinați numerele reale x pentru care $f(x^2) = 5x$.

5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3 x = 4\log_x 3$.

5p 4. Se consideră mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Determinați numărul de submulțimi ale lui A care au cel puțin patru elemente.

5p 5. Se consideră punctele A (-2,1), B(2,0) și C(-6,-4). Calculați distanța de la O la centrul de greutate al triunghiului ABC.

5p 6. Știind că $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ și $tg\, x = 3$, arătați că $\frac{3\sin x + 2\cos x}{5\sin x - 4\cos x} = 1$

SUBIECTUL al II-lea *(30 de puncte)*

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & x \\ 9 & 16 & x^2 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p a) Arătați că $\det(A(2) - A(1)) = 0$

5p b) Arătați că $\det(A(x)) = (x-3)(x-4)$

5p c) Determinați numărul real m pentru care $\det(A(m)) \leq \det(A(x))$, pentru orice x real.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = \frac{3}{2} - \frac{x}{2} - \frac{y}{2} + \frac{xy}{2}$

5p a) Arătați că $-1 * 0 * 1 = 1$.

5p b) Determinați simetricul elementului 2 în raport cu legea “ $*$ ”.

5p c) Arătați că pentru orice x și y din mulțimea $H = \{4k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$, avem că $x * y \in H$.

SUBIECTUL al III-lea *(30 de puncte)*

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{x^4 + 48}$.

5p a) Arătați că $f'(x) = -\frac{3(x-2)(x+2)(x^2+4)}{(x^4+48)^2}, x \in \mathbb{R}$.

5p b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f, în punctul de abscisă x=2, situat pe graficul funcției f.

5p c) Demonstrați că $-\frac{1}{32} \leq f(x) \leq \frac{1}{32}$, pentru orice număr real x.

2. Se consideră funcția $f:(-2,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2x+5}{x^2+5x+6}$.

5p **a) Arătați că** $\int_0^1 (x+2)(x+3)f(x)dx=6$.

5p **b) Calculați** $\int_1^2 f(\mathrm{x})dx$.

5p **c) Demonstrați că orice primitivă F:** $(-2,\infty)\to\mathbb{R}$ **a funcției f este concavă.**

BAREM DE EVALUARE ȘI NOTARE

Filiera teoretică, profilul real, specializarea Ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice solutie corecta, chiar daca este diferita de cea din barem, se acorda punctajul corespunzator.**
- **Nu se acorda fractiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvari partiale, in limitele punctajului indicat in barem.**
- **Se acorda 10 puncte din oficiu. Nota finala se calculeaza prin impartirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

Subiectul I ***30 puncte***

1.	$w = z_1^2 + 5z_2 \Rightarrow w = (2-5i)^2 + 5(3+4i)$ $w = -21 - 20i + 15 + 20i = -6 \Rightarrow w \in \mathbb{R}$.	2p 3p
2.	$3x^2 + 2 = 5x \Leftrightarrow 3x^2 - 5x + 2 = 0$. $x=\frac{2}{3}$ $și$ $x = 1$.	3p 2p
3.	$\log_3 x = 4\log_x 3 \Leftrightarrow (\log_3 x)^2 = 4$ $\log_3 x = 2$ $și$ $\log_3 x = -2 \Leftrightarrow x = 9$ $și$ $x = \frac{1}{9}$, care verifică ecuația	2p 3p
4.	Numărul de submulțimi cerut este egal cu $C_6^4 + C_6^5 + C_6^6 =$ = 15 + 6 + 1 = 22	3p 2p
5.	Fie G (x_G, y_G) cu $x_G = \frac{-2+2-6}{3} = -2$ și $y_G = \frac{1+0-4}{3} = -1$ $[OG] = \sqrt{(x_G - x_O)^2 + (y_G - y_O)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$.	2p 3p
6.	Cum $x \in (0,\frac{\pi}{2})$, avem că, $\cos x \neq 0$. Împărțind prin $\cos x$, se obține $\frac{3\,\text{tg}\,x+2}{5\,\text{tg}\,x-4} = \frac{3\cdot3+2}{5\cdot3-4} = 1$	2p 3p

Subiectul al II-lea ***30 puncte***

1.a)	$A(2) - A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 9 & 16 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 9 & 16 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow \det(A(2) - A(1)) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$	3p 2p

b)	$\det(A(x)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & x \\ 9 & 16 & x^2 \end{pmatrix} = 4x^2 + 9x + 48 - 36 - 3x^2 - 16x =$ $= x^2 - 7x + 12 = (x-3)(x-4)$	3p 2p
c)	$\det(A(m)) \leq \det(A(x)) \Leftrightarrow m^2 - 7m + 12 \leq x^2 - 7x + 12$ $\Rightarrow x^2 - 7x - m^2 + 7m \geq 0, pentru\ orice\ x\ real$ $\Rightarrow \Delta \leq 0 \Leftrightarrow 49 - 4(-m^2 + 7m) \leq 0 \Leftrightarrow 4m^2 - 28m + 49 \leq 0$ $\Leftrightarrow (2m-7)^2 \leq 0 \Leftrightarrow m = \frac{7}{2}$	1p 1p 2p 1p
2.a)	$-1 * 0 * 1 = (-1 * 0) * 1 = \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2} - \frac{0}{2} + \frac{0}{2}\right) * 1 =$ $= 2 * 1 = \frac{3}{2} - \frac{2}{2} - \frac{1}{2} + \frac{2}{2} = 1$	3p 2p
b)	Determinarea elementului neutru e = 3 Căutăm $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $a * 2 = 2 * a = 3$ $\frac{1}{2}(2a - 2 - a + 3) = 3 \Rightarrow a + 1 = 6 \Rightarrow a = 5$	2p 1p 2p
c)	Fie $x, y \in H \Rightarrow x = 4k + 1$ și $y = 4p + 1, cu\ k, p \in \mathbb{Z}$ $x * y = \frac{3}{2} - \frac{4K+1}{2} - \frac{4P+1}{2} + \frac{(4K+1)(4P+1)}{2} = \frac{16kp+2}{2} =$ $= 4(2kp) + 1 = 4j + 1, unde\ j = 2kp \in \mathbb{Z} \Rightarrow x * y \in H$	1p 2p 2p

Subiectul al III-lea ***30 puncte***

1.a)	$\boldsymbol{f'(x)} = \frac{1 \cdot (x^4 + 48) - x \cdot 4x^3}{(x^4 + 48)^2} = \frac{3(16 - x^4)}{(x^4 + 48)^2} =$ $= -\frac{3(x^4 - 16)}{(x^4 + 48)^2} = -\frac{\boldsymbol{3(x-2)(x+2)(x^2+4)}}{\boldsymbol{(x^4+48)^2}}, x \in \mathbb{R}$	3p 2p
b)	$f(2) = \frac{1}{32}, f'(2) = 0$ Ecuația tangentei este y- $f(2)$=$f'(2)(x-2), deci\ y = \frac{1}{32}$	2p 3p
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2\ sau\ x = -2$ $x \in (-\infty, -2] \Longrightarrow f'(x) \leq 0, deci\ f\ descrescătoare\ pe\ (-\infty, -2];\ x \in [-2,2]$ $\Longrightarrow f'(x) \geq 0, deci\ f\ crescătoare\ pe\ [-2,2] și\ x \in [2, +\infty) \Longrightarrow f'(x) \leq 0$, deci f descrescătoare pe $[2, +\infty)$ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0, f(-2) = -\frac{1}{32}, f(2) = \frac{1}{32}$ și $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0, obținem$ $-\frac{1}{32} \leq f(x) \leq \frac{1}{32}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$	1p 1p 3p
2.a)	$\int_0^1 (x+2)(x+3) f(x) dx = \int_0^1 (2x+5) dx = (x^2 + 5x) \Big\vert_0^1 =$ = 1+5-0= 6	3p 2p

b)	$\int_1^2 \mathrm{f(x)}dx = \int_1^2 \frac{2x+5}{x^2+5x+6}dx = \ln\,(x^2+5x+6)\Big\vert_1^2 =$ $= \ln 20 - \ln 12 = \ln\frac{5}{3}$	3p 2p
c)	$F'(x) = f(x), x \in (-2,\infty)$, deci $F''(x) = \frac{-2x^2-10x-13}{(x^2+5x+6)^2}, x \in (-2,\infty)$ $F''(x) < 0, pentru\ orice\ x \in (-2,\infty)$, deci orice primitivă F a funcției f este concavă.	2p 3p

Echipa de profesori:

GĂNESCU CORNRL – CONSTANTIN (Liceul Tehnologic „Dumitru Dumitrescu” Buftea)

ZĂNOAGĂ MARIUS FLORIN(Liceul Tehnologic „Dumitru Dumitrescu” Buftea)

COSMESCU ANA-MARIA (Școala Gimnazială Nr. 190 București)

MORARU DANIELA – Inspector ISJ Ilfov