SIMULARE EXAMEN BACALAUREAT
Matematică M_mate-info, noiembrie 2022
Clasa a XII-a **Simulare**

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică
• Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
• Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

Subiectul I *(30 puncte)*

5p	**1.**	Calculați partea imaginară a numărului complex $z=\frac{1}{2+i}$, unde $i^2=-1$.
5p	**2.**	Determinați cel mai mare număr natural n pentru care ecuația $x^2+3x-n+5=0$ **nu** are rădăcini reale.
5p	**3.**	Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3\left(x^2+3\right)=1$.
5p	**4.**	Determinați numărul de submulțimi cu cel puțin două elemente ale mulțimii $A=\{0;1;...;4\}$.
5p	**5.**	În reperul cartezian xOy se consideră dreptele $d_1: y=\frac{x}{3}+3$ și $d_2: y=(m-1)x+1$, unde m este număr real. Determinați numărul real m, pentru care dreptele d_1 și d_2 sunt perpendiculare.
5p	**6.**	Ştiind că $x\in\left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)$ şi că $\sin x=-\frac{1}{2}$ să se calculeze $\sin 2x$.

Subiectul al II-lea *(30 puncte)*

1. Se consideră matricele $A(m)=\begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}, m\in\mathbb{R}$ și $B=\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

5p a) Arătați că matricea $A(m)$ este inversabilă pentru orice $m\in\mathbb{R}\setminus\{-2,1\}$.

5p b) Arătați că $A^{-1}(-1)=\frac{1}{2}A(0)$, unde $A^{-1}(-1)$ este inversa matricei $A(-1)$.

5p c) Determinați $X\in M_{3,1}(\mathbb{R})$ astfel încât $A(-1)\cdot X=B$.

2. Pe mulțimea numerelor raționale $\mathbb{Q}$ se definește legea de compoziție $x*y=\frac{1}{5}xy+3x+3y+30$.

5p a) Arătați că $x*(-15)=-15, \forall x \in \mathbb{Q}$.

5p b) Dați exemplu de două numere raționale x și y care nu sunt numere întregi și pentru care $x*y$ este număr întreg.

5p c) Arătați că funcția $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}, f(x)=5x-15$ are proprietatea $f(x\cdot y)=f(x)*f(y), \forall x,y\in\mathbb{Q}$.

Subiectul al III-lea *(30 puncte)*

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\sqrt{x^2+2x+2}$.

5p b) Arătați că $f'(x)=1+\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$.

5p b) Determinați ecuația asimptotei spre $-\infty$ la graficul funcției f.

5p c) Determinați imaginea funcției f.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{e^x}+\frac{x-2}{x}$. și funcția F: $(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=-e^{-x}+x-2\ln(x)$.

5p a) Aratați că funcția F este o primitivă a funcției f.

5p b) Calculați $\int xf(x)dx$.

5p c) Determinați primitiva G : $(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ a funcției f, al cărei grafic conține punctul $M(1,\frac{e+1}{e})$.

Echipa de profesori:
PRUTESCU DANIEL (Liceul German HERMANN OBERTH, Voluntari)
HLEVCA CRISTINA (Liceul Teoretic IOAN PETRUȘ, Otopeni)
APOSTOL MIHAI (Liceul Teoretic HORIA HULUBEI, Măgurele)

Examenul de bacalaureat naţional 2023
Proba E. c)
Matematică M_mate-info
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE simulare noiembrie 2022

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

Subiectul I *(30 puncte)*

1.	$z = {}^{2-i)}\frac{1}{2+i} = \frac{2-i}{4+1} = \frac{2-i}{5}$ $\Rightarrow Im(z) = \frac{2}{5}$	***3p*** ***2p***
2.	$\Delta = 9 - 4(-n+5)$ $= 9 + 4n - 20 = 4n - 11$ Cum ecuația nu are soluții reale $\Rightarrow \Delta < 0$ Deci obținem $4n - 11 < 0 \Leftrightarrow n < \frac{11}{4}$ Prin urmare cel mai mare număr natural care îndeplinește soluția este $n = 2$	***3p*** ***2p***
3.	$\log_3(x^2+3) = 1 \Leftrightarrow x^2 + 3 = 3 \Leftrightarrow x^2 = 0$ $\Rightarrow x = 0$ Verificare: $\log_3(0^2+3) = \log_3 3 = 1$	***3p*** ***2p***
4.	numărul tuturor submulțimilor mulțimii $A = \{0;1;...;4\}$ este $2^5 = 32$. Mulțimea vidă este mulțimea cu niciun element numărul de submulțimi cu un element ale mulțimii A este 5 numărul de submulțimi cu cel puțin două elemente ale mulțimii este $32 - 1 - 5 = 26$	***3p*** ***2p***
5.	Condiția de perpendicularitate a dreptelor d_1 și d_2 este $m_{d_1} \cdot m_{d_2} = -1$ $m_{d_1} = \frac{1}{3}$ și $m_{d_2} = m - 1$	***3p*** ***2p***

	Deci $\frac{1}{3}\cdot(m-1)=-1 \Leftrightarrow m-1=-3 \Leftrightarrow m=-2$	
6.	$\sin^2 x+\cos^2 x=1 \Leftrightarrow \cos^2 x=\frac{3}{4}$. Deci $\cos x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. $x\in\left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)$ avem $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$	***3p***
	$\sin 2x=2\sin x\cdot\cos x \Rightarrow \sin 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}$	***2p***

Subiectul al II-lea ***(30 puncte)***

1a	$A(m)$ inversabilă $\Leftrightarrow \det(A(m))\neq 0$	**3p**
	$\det(A(m))=(m+2)(m-1)^2$	
	$\det(A(m))=0 \Leftrightarrow m\in\{-2,1\} \Rightarrow A(m)$ inversabilă $\Leftrightarrow m\in\mathbb{R}\setminus\{-2,1\}$	**2p**
1b	$A^{-1}(-1)\cdot A(-1)=A(-1)\cdot A^{-1}(-1)=I_3 \Rightarrow A^{-1}(-1)=\frac{1}{2}A(0) \Leftrightarrow$ $\frac{1}{2}A(0)\cdot A(-1)=A(-1)\cdot\frac{1}{2}A(0)=I_3$	**2p**
	$\frac{1}{2}A(0)\cdot A(-1)=I_3$ și $A(-1)\cdot\frac{1}{2}A(0)=I_3$, deci $\Rightarrow A^{-1}(-1)=\frac{1}{2}A(0)$	**3p**
1c	$A(-1)\cdot X=B$ înmulțim la stânga cu $\Rightarrow A^{-1}(-1)=\frac{1}{2}A(0)$ (cf b)$\Rightarrow$	**2p**
	$X=\frac{1}{2}A(0)\cdot B=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$	**3p**
2a	$x*(-15)=\frac{1}{5}x\cdot(-15)+3x-45+30=$	**3p**
	$=-3x+3x-45+30=-15, \forall x\in\mathbb{Q}.$	**2p**
2b	orice exemplu corect de numere $x,y\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$ și demonsrația faptului că $x*y\in\mathbb{Z}$ se punctează cu 5p	**3p**

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN ILFOV | MINISTERUL EDUCAȚIEI

	$x=-\frac{15}{2}\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}, y=-\frac{43}{3}\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}\Rightarrow$ $x*y=\frac{1}{5}\cdot\left(-\frac{15}{2}\right)\left(-\frac{43}{3}\right)+3\cdot\left(-\frac{15}{2}\right)+3\cdot\left(-\frac{43}{3}\right)+30=$ $=\frac{43}{2}-\frac{45}{2}-43+30=-1-43+30=-14\in\mathbb{Z}$	**2p**
2c	$x*y=\frac{1}{5}(x+15)(y+15)-15,(\forall)x,y\in\mathbb{Q} \Rightarrow f(x\cdot y)=5xy-15\ \ (\forall)x,y\in\mathbb{Q}$ (1) $f(x)*f(y)=\frac{1}{5}(f(x)+15)(f(y)+15)-15=\frac{1}{5}(5x-15+15)(5y-15+15)-15=$ $=\frac{1}{5}\cdot 25xy-15=5xy-15,\ (\forall)x,y\in\mathbb{Q}$ (2). Din (1) și (2) $\Rightarrow f(xy)=f(x)*f(y)$ $(\forall)x,y\in\mathbb{Q}$	**2p** **3p**

Subiectul al III-lea ***(30 puncte)***

1.	**a)**	$f'(x)=1+\frac{(x^2+2x+2)'}{2\sqrt{x^2+2x+2}}$ $f'(x)=1+\frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+2}}=1+\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}, x\in\mathbb{R}$	***3p*** ***2p***
	b)	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+2x+2}\right)=$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(x+\sqrt{x^2+2x+2})(x-\sqrt{x^2+2x+2})}{(x-\sqrt{x^2+2x+2})}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(x^2-x^2-2x-2)}{(x-\sqrt{x^2+2x+2})}=$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(-2x-2)}{(x-\sqrt{x^2+2x+2})}=-1$ Dreapta de ecuație $y=-1$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$.	***1p*** ***1p*** ***1p*** ***2p***
	c)	$f'(x)=1+\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}=\frac{\sqrt{x^2+2x+2}+(x+1)}{\sqrt{x^2+2x+2}}>0, x\in\mathbb{R}$ f *este strict crescătoare pe* $\mathbb{R}$. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, $\mathrm{Im}(f)=(-1,+\infty)$	***2p*** ***1p*** ***1p*** ***1p***
2.	**a)**	$F(x)$ este derivabilă pe $(0,+\infty)$. $F'(x)=\left(-e^{-x}+x-2\ln(x)\right)'=\left(-e^{-x}\right)'+x'-(2\ln(x))'$. $F'(x)=\frac{1}{e^x}+1-\frac{2}{x}=\frac{1}{e^x}+\frac{x-2}{x}=f(x)\ \forall\ x\in(0,+\infty)$ F este o primitivă a funcției f.	***2p*** ***2p*** ***1p***
	b)	$\int xf(x)dx=\int x\left(\frac{1}{e^x}+\frac{x-2}{x}\right)dx=\int\frac{x}{e^x}dx+\int(x-2)dx=$	***2p***

	$-\frac{x}{e^x}-\int\left(-\frac{1}{e^x}\right)dx+\frac{x^2}{2}-2x=-\frac{x}{e^x}-\frac{1}{e^x}\frac{x^2}{2}-2x+C$	***3p***
c)	$G(x)=F(x)+\alpha\,,G(x)=-e^{-x}+x-2\ln(x)+\alpha$ $G(1)=\frac{-1}{e}+1-2\ln(1)+\alpha=\frac{-1+e}{e}+\alpha=\frac{e+1}{e}$ $\alpha=\frac{e+1}{e}-\frac{-1+e}{e}=\frac{2}{e}, G(x)=F(x)+\frac{2}{e}.$	***2p*** ***2p*** ***1p***

Prof. propunători:
Daniel Prutescu (liceul german H. OBERTH)
Cristina Hlevca (liceul teoretic I. PETRUȘ)
Mihai Apostol (liceul teoretic H. HULUBEI)