INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN ILFOV

MINISTERUL EDUCAȚIEI

SIMULARE EXAMEN BACALAUREAT
Matematică M_ Științe ale naturii, noiembrie 2022

• Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
• La toate subiectele se cer rezolvări complete. Se acordă 10 puncte din oficiu.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1. Să se arate că** $\log_2(\sqrt[3]{64}) = 2$

5p **2. Fie funcția** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 2x - 5$ **cu rădăcinile** x_1 *și* x_2**. Să se calculeze** $x_1 + x_2 - 2x_1 \cdot x_2$.

5p **3. Să se rezolve ecuația** $3^{x+1} + 2 \cdot 3^{-x} = 7$

5p **4. Să se determine numărul de elemente ale unei mulțimi care are 36 de submulțimi cu două elemente.**

5p **5. În reperul cartezian *xOy* se consideră punctele A(3,2) si B(5,3). Determinați coordonatele punctului M știind că** $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

5p **6. Se consideră numerele reale *a* și *b* astfel încat** $a + b = \frac{\pi}{6}$**. Arătați că** $2\cos a=\sqrt{3}\cos b+\sin b$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră mulţimea $G = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ 2x+2x^2 & 4x & 1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}$

5p **a) Arătați că det(A(1)) = 1**

5p **b) Demonstrați că** $A(x) \cdot A(y) = A(x+y)$, **oricare ar fi** $x, y \in \mathbb{R}$

5p **c) Să se rezolve ecuația** $A(2) \cdot X = A(3)$, **unde** $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

2. Pe multimea numerelor reale se defineste legea de compozitie asociativă $x * y = -xy + 2x + 2y - 2$

5p **a) Arătați că** $x * y = 2 - (x-2)(y-2)$, **oricare ar fi** $x, y \in \mathbb{R}$

5p **b) Determinați numerele reale x pentru care** $x * x * x = 1$ '

5p **c) Calculați** $\sqrt[3]{1} * \sqrt[3]{2} * \sqrt[3]{3} * \ldots \sqrt[3]{2022}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. **Se consideră funcția** $f:(0;\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x-2\ln x$.

5p a) **Să se arate că** $f'(x)+f''(x)=\frac{x^2-2x+2}{x^2}$

5p b) **Să se arate că funcția *f* este strict descrescătoare pe intervalul (0;2)**

5p c) **Să se arate că** $x-2\geq 2ln\frac{x}{2}$ **, oricare ar fi** $x\in(0;\infty)$

2. **Se consideră funcția** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-x+2$

5p a) **Arătați că** $\int_0^1 f(x)dx=\frac{11}{6}$.

5p b) **Calculați** $\int_1^2 e^x\left(x^2-f(x)\right)dx$.

5p c) **Determinați numărul real pozitv supraunitar *a*, știind că** $\int_1^a \frac{2x-1}{f(x)}dx=ln\,4$

BAREM DE EVALUARE ȘI NOTARE

Filiera teoretică, profilul real, specializarea Ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice solutie corecta, chiar daca este diferita de cea din barem, se acorda punctajul corespunzator.**
- **Nu se acorda fractiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvari partiale, in limitele punctajului indicat in barem.**
- **Se acorda 10 puncte din oficiu. Nota finala se calculeaza prin impartirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

Subiectul I 30 de puncte

1	$\sqrt[3]{64} = 4$ $\log_2\left(\sqrt[3]{64}\right) = \log_2 4 = 2$	3p 2p
2	$x_1 + x_2 = -2$ $x_1 \cdot x_2 = -5$ $\quad x_1 + x_2 - 2x_1 \cdot x_2 = 8$	2p 3p
3	$3^x = t, t > 0 => 3t^2 - 7t + 2 = 0$ $t_1 = \frac{1}{3} => x_1 = -1$, $t_2 = 2 => x_1 = \log_3 2$	2p 3p
4	$C_n^2 = 36, n \geq 2$ $\frac{n(n-1)}{2} = 36 => n = 9$	2p 3p
5	$\overrightarrow{AB}$ = (5-3) $\vec{i}$ + (3-2) $\vec{j}$ = $2\vec{i} + \vec{j}$ si $\overrightarrow{AM}$ = (x_M- 3) $\vec{i} + (y_M - 2)$ $\vec{j}$ $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \Rightarrow x_M - 3 = \frac{2}{3}$ si $y_M - 2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x_M = \frac{11}{3}$ si $y_M = \frac{7}{3}$	2p 3p
6	a = $\frac{\pi}{6} - b \Rightarrow \cos a = \cos\left(\frac{\pi}{6} - a\right) =$ $= \frac{\sqrt{3}}{2}\cos b + \frac{1}{2}\sin b \Rightarrow 2\cos a =$ $\sqrt{3}\cos b + \sin b$	2p 3p

Subiectul al II-lea30 puncte

1.a)	$\det(A(1)) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ Finalizare	2p 3p
b)	$A(x) \cdot A(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x+y & 1 & 0 \\ 2x + 2x^2 + 4xy + 2y + 2y^2 & 4x + 4y & 1 \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x+y & 1 & 0 \\ 2(x+y) + 2(x+y)^2 & 4(x+y) & 1 \end{pmatrix}$ $= A(x+y)$	3p 2p

1.c	$I_3 = A(0), conform\ b)\ A(x) \cdot A(-x) = A(0) => (A(x))^{-1} = A(-x)$ $X = A(-2) \cdot A(3) => X = A(1)$	3p 2p
2.a)	$\boldsymbol{x} * \boldsymbol{y} = -\boldsymbol{xy} + 2\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{y} + 2 - 4 =$ $2 - (xy - 2x - 2y + 4) = 2 - (\boldsymbol{x} - 2)(\boldsymbol{y} - 2)$, *oricare ar fi* $x, y \in \mathbb{R}$	2p 3p
b)	$x * x = 2 - (x-2)^2, x * x * x = 2 + (x-2)^3$ $2 + (x-2)^3$=1 ⇔ $(x-2)^3$= -1 ⇔ x-2=-1 ⇔ x=1	3p 2p
c)	$\boldsymbol{x} * 2 = 2 * \boldsymbol{x} = 2$, *oricare ar fi* $x, y \in \mathbb{R}$ $\sqrt[3]{1} * \sqrt[3]{2} * .... * \sqrt[3]{2022} = (\sqrt[3]{1} * .... * \sqrt[3]{7}) * \sqrt[3]{8} * (\sqrt[3]{9} * .... * \sqrt[3]{2022})$ $= 2 * (\sqrt[3]{9} * ..... * \sqrt[3]{2022}) = 2$	2p 3p

Subiectul al III-lea **30 puncte**

1.a)	$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}) = 1 - \frac{2}{x}$ $\boldsymbol{f}''(\boldsymbol{x}) = \frac{2}{x^2}$, $f'(x) + f''(x) = \frac{x^2-2x+2}{x^2}$	2p 3p
b)	$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}) = \frac{x-2}{x} => \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}) < 0, \forall\, x \in (0;2)$ și $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}) > 0, \forall\, x \in (2;\infty)$ Finalizare	3p 2p
c)	Conform b) avem $f(x) \geq f(2), \forall\, x \in (0;\infty)$ $x - 2lnx \geq 2 - 2ln2 => \boldsymbol{x} - 2 \geq 2\boldsymbol{ln}\frac{\boldsymbol{x}}{2}, \forall x \in (0;\infty)$	2p 3p
2.a)	$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (x^2 - x + 2)dx = (\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x)\Big|_0^1 =$ $= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 = \frac{11}{6}$	3p 2p
b)	$\int_1^2 e^x(x^2 - f(x))dx = \int_1^2 e^x(x-2)dx = (x-2)e^x\Big|_1^2 - \int_1^2 e^x dx =$ $= e - e^x\Big|_1^2 = e -$ $e^2 + e = 2e - e^2$	3p 2p
c)	$\int_1^a \frac{2x-1}{f(x)}dx = \int_1^a \frac{2x-1}{x^2-x+2}dx$, $x^2 - x + 2 = t \Rightarrow (2x-1)dx = dt$. Pentru x = 1 ⇒ t = 2 si pentru x = a ⇒ $t = a^2 - a + 2$ Integrala devine $\int_2^{a^2-a+2} \frac{1}{t}\,dt = ln\,\|t\|\Big|_2^{a^2-a+2} = \ln \frac{a^2-a+2}{2}$ ⇒ $a^2 - a + 2 = 8$, cu solutia convenabila a = 3.	2p 3p

Echipa de profesori:

GĂNESCU CORNRL – CONSTANTIN (Liceul Tehnologic „Dumitru Dumitrescu” Buftea)

ZĂNOAGĂ MARIUS FLORIN(Liceul Tehnologic „Dumitru Dumitrescu” Buftea)

COSMESCU ANA-MARIA (Școala Gimnazială Nr. 190 București)

MORARU DANIELA – Inspector ISJ Ilfov