**Examenul național de bacalaureat 2023**
**Proba E. c)**
**Matematică *M_mate-info***

**Simulare**

***Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică***
***Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică***

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

**SUBIECTUL I** **(30 puncte )**

5p **1.** Dacă $z=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$, calculați modulul numărului complex $z^2$.

5p **2.** Determinați $m\in\mathbf{R}$, dacă valoarea minimă a functiei $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=x^2-mx+1$ este $-8$.

5p **3.** Rezolvați, în mulțimea numerelor reale, ecuația $5^{x+1}+5^{-x}=6$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie pătrat perfect.

5p **5.** Determinați ecuația dreptei ce trece prin $A(1,-2)$ şi este perpendiculară pe dreapta $d: x+2y-5=0$.

5p **6.** Dacă $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ şi $\sin\alpha=\frac{1}{3}$, calculați $tg\alpha$.

**SUBIECTUL II** **(30puncte )**

**1.** Considerăm sistemul de ecuații: $\begin{cases}x-2y+z=0\\ ax+y-2z=1\\ -x+3y+z=b\end{cases}$, $a,b\in\mathbf{R}$ şi matricea sa, $A=\begin{pmatrix}1&-2&1\\ a&1&-2\\ -1&3&1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătați că $\det(A)=5a+4$;

5p **b)** Determinați numerele reale $a,b$ pentru care tripletul $(1,0,-1)$ este soluție a sistemului;

5p **c)** Determinați numerele reale $a,b$ astfel încât sistemul să fie compatibil nedeterminat.

**2.** Pe $\mathbf{R}$ se defineşte legea de compoziţie asociativă: $x*y=xy-x-y+2$.

5p **a)** Calculați $\sqrt{2}*2$;

5p **b)** Determinați elementele simetrizabile ale lui $\mathbf{R}$ raport cu legea „$*$”;

5p **c)** Rezolvați, în mulțimea numerelor reale, ecuația $\underbrace{x*x*x*\cdots*x}_{10\ ori\ x}=1025$.

**SUBIECTUL III** **(30 puncte)**

**1.** Se consideră funcția $f:(-1,\infty)\to\mathbf{R},\ f(x)=\ln(x+1)-\frac{x}{x+1}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{x}{(x+1)^2},\forall x\in(-1,\infty)$;

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}$;

5p **c)** Demonstrați că $\ln(x+1)\geq\frac{x}{x+1},\forall x\in(-1,\infty)$.

**2.** Se consideră funcţiile $f_n:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f_n(x)=\frac{x^n}{x^2+4},\ n\in\mathbb{N}$.

5p **a)** Arătați că $F_1:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ F_1(x)=\frac{1}{2}\ln(x^2+4)$ este o primitivă a funcției $f_1$;

5p **b)** Determinați o primitivă a funcției $f_2$ a cărei reprezentare grafică trece prin punctul $A\left(2,-\frac{\pi}{2}\right)$;

5p **c)** Arătați că orice primitivă a funcției $f_4$ este bijectivă.

**Examenul naţional de bacalaureat 2023**
**Proba E. c)**
**Matematică *M_mate-info***
**BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE**

**Simulare**

***Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică***
***Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică***

**• Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
**• Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
**• Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

**SUBIECTUL I** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.** | $z=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\Rightarrow z^2=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ | 3p |
| | $\left\|z^2\right\|=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=1$ | 2p |
| **2.** | $f_{\min}=-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{m^2-4}{4}$ | 3p |
| | $m^2-4=32\Rightarrow m_{1,2}=\pm 6$ | 2p |
| **3.** | $5^{x+1}+5^{-x}=6\Rightarrow 5\cdot 5^x+\frac{1}{5^x}=6\Rightarrow 5\cdot 5^{2x}-6\cdot 5^x+1=0$ | 3p |
| | $5^x=1\Rightarrow x_1=0$<br>$5^x=\frac{1}{5}\Rightarrow x_2=-1$ | 2p |
| **4.** | Nr. cazuri posibile:90; cazuri favorabile: $4^2,5^2,\cdots,9^2$. | 3p |
| | $P=\frac{6}{90}\Rightarrow P=\frac{1}{15}$ | 2p |
| **5.** | g: $y-y_A=m(x-x_A)$; $m\cdot m_d=-1$ | 3p |
| | $m_d=-\frac{1}{2}\Rightarrow m=2\Rightarrow g:\ y+2=2(x-1)\Rightarrow\ g:\ y=2x-4$ | 2p |
| **6.** | $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha\Rightarrow\cos^2\alpha=1-\frac{1}{9}\Rightarrow\cos^2\alpha=\frac{8}{9}\overset{\cos\alpha<0}{\Rightarrow}\ \cos\alpha=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ | 3p |
| | $tg\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{4}$ | 2p |

**SUBIECTUL II** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.a)** | $\det(A)=\begin{vmatrix}1 & -2 & 1\\ a & 1 & -2\\ -1 & 3 & 1\end{vmatrix}=1+3a-4+1+6+2a$ | 3p |
| | $\det(A)=5a+4$ | 2p |
| **b)** | $x=1, y=0, z=-1$ verifică ecuațiile | 3p |
| | $a+0+2=1\Rightarrow a=-1$<br>$-1+0-1=b\Rightarrow b=-2$ | 2p |
| **c)** | $\det(A)=0\Rightarrow a=-\frac{4}{5}\Rightarrow rang\ (A)\le 2$<br>$d_2=\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}=3\ne 0, deci\ rang(A)=2$ | 3p |
| | $d_{car}=\begin{vmatrix}-2 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1\\ 3 & 1 & b\end{vmatrix}=0\Rightarrow b=-\frac{5}{3}$ | 2p |
| **2. a)** | $\sqrt{2}*2=2\sqrt{2}-\sqrt{2}-2+2$ | 3p |
| | $\sqrt{2}*2=\sqrt{2}$ | 2p |
| **b)** | Element neutru: $e=2$ | 3p |
| | Fie $x$ element simetrizabil $\Rightarrow(\exists)x'\in\mathbf{R}:\quad x*x'=x'*x=2\Rightarrow x'(x-1)=x$<br>$x\ne 1\Rightarrow(\exists)x'=\frac{x}{x-1}\in\mathbf{R}$, deci $U(\mathbf{R},*)=\mathbf{R}\setminus\{1\}$ | 2p |
| **c)** | $\underbrace{x*x*x*\cdots*x}_{10\ ori\ x}=1025\Leftrightarrow(x-1)^{10}+1=1025$ | 3p |
| | $(x-1)^{10}=2^{10}\Rightarrow x-1=\pm 2\Rightarrow x_1=3\ ;\ x_2=-1$ | 2p |

**SUBIECTUL III** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1. a)** | $f'(x)=\left(\ln(x+1)-\frac{x}{x+1}\right)'=$ | 3p |
| | $=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{x}{(x+1)^2}$ | 2p |
| **b)** | $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{2x}=$ | 3p |
| | $\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{(x+1)^2}}{2x}=\frac{1}{2}$ | 2p |
| **c)** | $f'(x)=0\Rightarrow x=0;\quad f'(x)<0, \forall x<0;\quad f'(x)>0, \forall x>0$ | 3p<br>2p |

| | | |
|---|---|---|
| | $x=0$ este punct de minim global, deci $f(x)\geq f(0)=0$ | |
| **2. a)** | $\left(F_1(x)\right)'=\left(\frac{1}{2}\ln\left(x^2+4\right)\right)'$ <br> $=\frac{x}{x^2+4}=f_1(x),\ \forall x\in\mathbf{R}.$ | 3p <br> 2p |
| **b)** | $F(x)\in\int f_2(x)dx=\int\frac{x^2}{x^2+4}dx=\int\left(1-\frac{4}{x^2+4}\right)dx=x-2arctg\frac{x}{2}+C$ <br> $F(x)=x-2arctg\frac{x}{2}+c;\quad F(2)=-\frac{\pi}{2}\Rightarrow c=-2$ <br> $F(x)=x-2arctg\frac{x}{2}-2$ | 3p <br> 2p |
| **c)** | $F_4(x)\in\int\frac{x^4}{x^2+4}dx\Rightarrow F_4'(x)=f_4(x)\geq 0,\ \forall x\in\mathbf{R}\Rightarrow F_4$ este injectivă <br> $f_4(x)=x^2-4+\frac{16}{x^2+4}\Rightarrow F_4(x)=\frac{x^3}{3}-4x+8arctg\frac{x}{2}+c;$ <br> Cum $\lim\limits_{x\to-\infty}F_4(x)=-\infty,\ \lim\limits_{x\to\infty}F_4(x)=\infty$ și $F_4$ este continua, rezultă că $F_4$ este surjectivă. | 3p <br> 2p |