Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I (30 puncte)

5p **1.** Determinați al cincilea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_1 = -1$ și $a_3 = 7$.

5p **2.** Determinați numărul real a . știind că punctul $A(-1, a)$ aparține graficului funcției $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 + 4x - 1$.

5p **3.** Rezolvați, în mulțimea numerelor reale, ecuația $5^{x^2-5x} = \frac{1}{625}$.

5p **4.** Aflați câte numere naturale de trei cifre distincte se pot forma cu cifrele 0,2,4,6 și 8.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,3)$ și $B(3,5)$. Determinați ecuația mediatoarei segmentului $[AB]$.

5p **6.** Știind că $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ și $\sin x = \frac{1}{3}$, calculați $\sin(2x)$.

SUBIECTUL II (30puncte)

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

5p **a)** Să se arate că, dacă $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ verifică relația $X \cdot A = A \cdot X$, atunci există $u, v \in \mathbb{R}$, astfel încât $X = \begin{pmatrix} u & 0 \\ v & u \end{pmatrix}$.

5p **b)** Calculați $A^n, n \in \mathbb{N}^*$.

5p **c)** Rezolvați în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, ecuația $X^4 = A$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție asociativă, definită prin $x \circ y = 2xy + 2x + 2y + 1,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Arătați că $x \circ y = 2(x+1)(y+1) - 1,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$

5p **b)** Aflați două elemente $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ astfel încât $a \circ b \in \mathbb{N}$.

5p **c)** Rezolvați, în mulțimea numerelor reale, ecuația $x \circ x \circ x = x$.

SUBIECTUL III (30 puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

5p **a)** Determinați asimptotele funcției f.

5p **b)** Determinați intervalele de monotonie ale funcției f.

5p **c)** Arătați că $f(x) \leq \frac{1}{e},\ \forall x \in (0, \infty)$.

2. Se consideră funcțiile $f, F: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = (x-1)e^x$ și $F(x) = (x-a)e^x + b$, unde $a, b \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Determinați numerele reale a, b știind că F este o primitivă a funcției f.

5p **b)** Pentru $a = 2$ și $b = e$, calculați $\lim\limits_{x \to 1} \frac{F(x)}{(x-1)^2}$.

5p **c)** Arătați că orice primitivă a funcției F este convexă pe intervalul $[1, \infty)$.

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

• Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
• Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
• Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a_1=-1, a_3=7 \Rightarrow r=4$ $a_5=15$	**3p** **2p**
2.	$A(-1,a)\in G_f \Leftrightarrow f(-1)=a$ $a=-2$	**3p** **2p**
3.	$5^{x^2-5x}=5^{-4} \Leftrightarrow x^2-5x+4=0$ $x_1=1, x_2=4$	**3p** **2p**
4.	Numerele au forma $\overline{abc}$ unde $a,b,c\in\{0,2,4,6,8\}$ cu $a\neq 0, a\neq b, b\neq c, a\neq c$ Pentru a avem 4 posibilități, pentru b avem 4 posibilități, iar pentru c avem 3 posibilități Sunt $4\cdot 4\cdot 3=48$ de astfel de numere	**3p** **2p**
5.	Mijlocul M al segmentului AB are coordonatele $x_M=\frac{1+3}{2}=2$, $y_M=\frac{3+5}{2}=4$ Panta dreptei AB este $m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=1$ Din condiția de perpendicularitate $m_d m_{AB}=-1 \Rightarrow m_d=-1$ Ecuația mediatoarei :$y-y_M=m_d(x-x_M) \Leftrightarrow y-4=-1(x-2) \Leftrightarrow y=-x+6$	**2p** **3p**
6.	$\sin^2 x+\cos^2 x=1 \Leftrightarrow \cos^2 x=\frac{8}{9} \Leftrightarrow \cos x=\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$ Din $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right) \Rightarrow \cos x<0 \Rightarrow \cos x=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ Atunci $\sin(2x)=2\sin x\cdot\cos x=-\frac{4\sqrt{2}}{9}$	**2p** **3p**

SUBIECTUL II **(30 de puncte)**

1. a)	Fie $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Relația $X\cdot A=A\cdot X \Leftrightarrow a+4b=a, b=b, c+4d=4a+c, d=4b+d$ Deducem $b=0$ și $d=a$ Se ia $u=a\in\mathbb{R}$ și $v=c\in\mathbb{R}$ și obținem concluzia	**3p** **2p**
b)	$A^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 8 & 1\end{pmatrix}, A^3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 12 & 1\end{pmatrix}$ Prin inducție matematică se demonstrează că $A^n=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 4n & 1\end{pmatrix}, \forall\, n\in\mathbb{N}^*$	**2p** **3p**
c)	Din ecuația $X^4=A \Rightarrow X\cdot A=A\cdot X$ Conform subpunctului a) deducem că există $u,v\in\mathbb{R}$, astfel încât $X=\begin{pmatrix}u & 0\\ v & u\end{pmatrix}$.	

	Atunci $X^2=\begin{pmatrix}u^2 & 0\\ 2uv & u^2\end{pmatrix}, X^4=\begin{pmatrix}u^4 & 0\\ 4u^3v & u^4\end{pmatrix}$ Ecuația devine $\begin{pmatrix}u^4 & 0\\ 4u^3v & u^4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 4 & 1\end{pmatrix}$, de unde $u^4=1, 4u^3v=4 \Rightarrow$ $(u,v)\in\{(-1,-1),(1,1)\}$. Soluțiile ecuației sunt $X_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}, X_2=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ -1 & -1\end{pmatrix}$	3p 2p
2. a)	$\forall\, x,y\in\mathbb{R}$, avem $x\circ y=2xy+2x+2y+1=2xy+2x+2y+2-1=$ $=2x(y+1)+2(y+1)-1=$ $=2(y+1)(x+1)-1=\ 2(x+1)(y+1)-1$	3p 2p
b)	Din a) avem $a\circ b=2(a+1)(b+1)-1,\ \ a,b\in\mathbb{R}$ Alegem $a,b\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ astfel încât $a+1=\sqrt{2}$ și $b+1=2\sqrt{2}$, adică $a=\sqrt{2}-1\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\,, b=2\sqrt{2}-1\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ Atunci $(\sqrt{2}-1)\circ(2\sqrt{2}-1)=2\cdot\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}-1=8-1=7\in\mathbb{N}$	3p 2p
c)	Conform a) avem $x\circ x=2(x+1)^2-1, x\circ x\circ x=4(x+1)^3-1$ Ecuația devine $(x+1)(2x+1)(2x+3)=0$ Se obțin soluțiile reale $x_1=-1, x_2=-\frac{1}{2}, x_1=-\frac{3}{2}$	2p 3p

SUBIECTUL III **(30 de puncte)**

1. a)	Funcția f este continuă pe $(0,\infty)$ deci în aceste puncte nu avem asimptote verticale $\lim_{x\searrow 0}\frac{\ln x}{x}=-\infty$, deci dreapta de ecuație $x=0$ este asimptotă verticală $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$, deci dreapta de ecuație $y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$	2p 3p
b)	Funcția f este continuă și derivabilă pe $(0,\infty)$ și $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}, x\in(0,\infty)$. Ecuația $f'(x)=0$ are soluția $x=e\in(0,\infty)$. Cum $f'(x)>0, \forall x\in(0,e)$ și $f'(x)<0, \forall x\in(e,\infty)$, deduce că funcția f este strict crescătoare pe $(0,e]$ și strict descrescătoare pe $[e,\infty)$.	2p 3p
c)	Conform b), $x=e$ este punct de maxim global, deci $f(e)=\frac{1}{e}$ este maximul global al funcției, deci $f(x)\le f(e)\Leftrightarrow f(x)\le\frac{1}{e}, \forall\, x\in(0,\infty)$. Se obține egalitate pentru $x=e$.	3p 2p
2. a)	F derivabilă pe $\mathbb{R}, F'(x)=(x-a)'e^x+(x-a)(e^x)'+(b)'=(x-a+1)e^x, \forall\, x\in\mathbb{R}$ F este primitivă pentru f deci $F'(x)=f(x), \forall\, x\in\mathbb{R}$. Deducem că $a=2$, iar b poate fi orice număr real.	2p 3p
b)	Pentru $a=2$ și $b=e$ obținem $F(x)=(x-2)e^x+e\Rightarrow$ $\lim_{x\to 1}\frac{F(x)}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{2(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{e^x}{2}=\frac{e}{2}$	2p 3p
c)	Fie $G:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ o primitivă a funcției F. Atunci G este derivabilă pe $\mathbb{R}$ și $G'(x)=F(x)$, $\forall\, x\in\mathbb{R}\Rightarrow G''(x)=f(x), \forall\, x\in\mathbb{R}$. Cum $G''(x)\ge 0, \forall\ \ x\in[1,\infty)$, deducem că funcția G este convexă pe $[1,\infty)$.	2p 3p