CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
„ ALEXANDRU PAPIU ILARIAN”
EDIȚIA a XXV-a
CLASA a V-a
15.10.2022

SUBIECTUL I

a) Aflați valoarea numărului x din egalitatea:
$7\cdot\{7:7+7:7+7\cdot[7\cdot(7-x)-7:7]\}=2023$

b) Determinați ultima cifră a numărului:
$a=1+1\cdot3+1\cdot3\cdot5+1\cdot3\cdot5\cdot7+\ldots+1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot2021$

SUBIECTUL II

Avem două lădițe cu același număr de fructe. Așezăm toate fructele din prima lădiță în coșuri a câte 7 fructe și rămânem cu 5 fructe. Așezăm toate fructele din a doua lădiță în coșuri a câte 5 fructe și rămânem cu 4 fructe. Vom pune la un loc toate fructele din cele două lădițe, apoi le vom așeza în coșuri a câte 35 de fructe. Câte fructe vor mai rămâne?

SUBIECTUL III

Un număr natural de forma $\overline{ab}$ se numește ***“ Papiist 2022”*** dacă îndeplinește relația:
$\overline{aba}+2022\cdot\overline{ba}=\overline{aab}+2022\cdot\overline{ab}$

a) Verificați dacă numărul 12 este ***“Papiist 2022”***

b) Aflați toate numerele ***“Papiiste 2022”.***

Florica Gînța și Vasile Gînța, Tg. Mureș

SUBIECTUL IV

Aflați câte numere naturale consecutive (începând cu 1) trebuie să adunăm, pentru ca dublul sumei să fie egal cu ultimul termen mărit cu 4080400.

Gazeta matematică 2022

Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru efectiv este de 120 min.
Fiecare subiect este evaluat cu 7 puncte

Colegiul Național "Alexandru Papiu – Ilarian"

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN MUREȘ

MINISTERUL EDUCAȚIEI

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
„ ALEXANDRU PAPIU ILARIAN”
EDIȚIA a XXV-a
CLASA a VI-a
15.10.2022

SUBIECTUL I

a) Să se determine cifrele x,y,z în baza zece, știind că: $\frac{1}{x+2y+3z}=\overline{0,xy}$.

b) Fie A = $\{n=\overline{x,(y)}+\overline{y,(z)}+\overline{z,(x)} / x, y, z \textit{ sunt cifre pare consecutive}\}$.
Să se determine $A \cap N$.

SUBIECTUL II

Fie numărul N= $23 + 23^2 + 23^3 + ... + 23^{2022}$. Determinați ultimele patru cifre ale numărului $5^4 \cdot N$.

GM 6-7-8 2022 (Clasa a V-a)

SUBIECTUL III

Semidreptele (OC și (OD sunt situate în interiorul unghiului $\sphericalangle AOB$ asttfel încât măsura unghiului $\sphericalangle AOC=90^0$ și măsura $\sphericalangle COD=20^0$. Dacă (OM și (ON sunt bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle AOD$ și $\sphericalangle BOC$, iar măsura $\sphericalangle MON=70^0$, calculați măsura $\sphericalangle AOB$.

SUBIECTUL IV

Se consideră mulțimea $A \subset N$ ale cărei elemente verifică simultan relațiile:

a) $1 \in A$
b) Dacă $x \in A$, atunci $2x+3 \in A$
c) Dacă $3x+1 \in A$, atunci $x \in A$.
Demonstrați că numerele $20, 60, 61$ și 2013 se găsesc în A.

Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru efectiv este de 120 minute.
Fiecare subiect este evaluat cu 7 puncte.

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
„ Al. PAPIU ILARIAN”
EDIȚIA a XXV-a
CLASA a VII-a
15.10.2022

SUBIECTUL I

Se consideră numerele raționale strict pozitive a, b, c, astfel încât $\frac{2a+3b}{3a+2b}=\frac{18}{17}$ și $\frac{b+2c}{2b+c}=\frac{14}{13}$. Determinați numerele naturale n care au proprietatea că $a^n+b^n=c^n$.

Supliment – Gazeta matematică 2022

SUBIECTUL II

a) Se consideră numerele naturale nenule a, b, c care verifică egalitatea:

$$\frac{3a}{4b+5c}=\frac{4b}{5c+3a}=\frac{5c}{3a+4b}$$

Demonstrați că $\sqrt{\frac{2}{a^2}+\frac{2}{b^2}+\frac{2}{c^2}} \in Q$

b) Să se arate că nu există numere reale distincte două câte două x_1, x_2, x_3, x_4 care verifică egalitățile:

$$|x_1-x_2|=|x_2-x_3|=|x_3-x_4|=|x_4-x_1|$$

SUBIECTUL III

Pe laturile opuse AB și CD ale unui paralelogram $ABCD$se construiesc în exteriorul său triunghiurile echilaterale ABM și CDP, iar pe laturile BC și DA se construiesc spre interiorul paralelogramului triunghiurile echilaterale BCNși DAQ. Dacă $AC+BD=25\,cm$ să se studieze natura patrulaterului $MNPQ$ și să se calculeze perimetrul său.

SUBIECTUL IV

În interiorul unghiului XOY cu măsura mai mică de 45 se află două puncte A și B. Determinați poziția punctelor $M \in OX$ și $N \in OY$, astfel încât suma $AM+MN+NB$ să fie minimă.

Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru efectiv este de 180 min.
Fiecare subiect este evaluat cu 7 puncte.

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
„ ALEXANDRU PAPIU ILARIAN”
EDIȚIA a XXV-a
CLASA a VIII-a
15.10.2022

SUBIECTUL I

a) Fie intervalul $I=(a,b)$. Dacă $I \cap Z=\{2022,2023\}$,să se calculeze $|a-2021|-|2023-b|+|b-a|$.

b) Dacă $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x, să se rezolve ecuația :

$$\frac{[x+1]+1}{[x+1]-1}=x.$$

SUBIECTUL II

Aflați valoarea maximă a sumei S și valoarea numărului x pentru care se realizează acest maxim: S=$\sqrt{2022-x}+\sqrt{x-2004}$.

SUBIECTUL III

Fie triunghiul ABC oarecare, ¿şi punctele coliniare A, C, E, $C \in (AE)$ şi B,C, F coliniare $B \in (CF)$ astfel încât CE=AB şi BF =A'C. Demonstrați că AA' trece prin mijlocul segmentului EF.

SUBIECTUL IV

În triunghiul dreptunghic ABC cu unghiul A=90^0 mediatoarea medianei AM , M$\in BC$ intersectează dreapta AB în punctul P. Demonstrați că $BC^2=4 \cdot AB \cdot$AP .

(enunț modificat GM 6-7-8/ 2022)

Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru efectiv este de 180 minute.
Fiecare subiect este evaluat cu 7 puncte.

CONCURSUL INTERJUDEȚEN DE MATEMATICĂ
„ ALEXANDRU PAPIU ILARIAN”
EDIȚIA a XXV-a
CLASA a V-a
15.10.2022

SOLUȚII ȘI BAREME

SUBIECTUL I

a) Aflați valoarea numărului x din egalitatea:
$7\cdot\{7:7+7:7+7\cdot[7\cdot(7-x)-7:7]\}=2023$

b) Determinați ultima cifră a numărului:
$a=1+1\cdot3+1\cdot3\cdot5+1\cdot3\cdot5\cdot7+\ldots+1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot2021$

Soluție:

a) $7:7+7:7+7\cdot[7\cdot(7-x)-7:7]=289$ (1p)
$7\cdot[7\cdot(7-x)-7:7]=287$ (1p)
$7\cdot(7-x)=42\Longrightarrow x=1$ (1p)

b) $u(a)=1+3+u(1\cdot3\cdot5)+u(1\cdot3\cdot5\cdot7)+\ldots+u(1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot2021)$ (1p)
$u(a)=4+u(\underbrace{5+5+5+\ldots+5}_{1009})$ (2p)
$u(a)=4+5=9$ (1p)

SUBIECTUL II

Avem două lădițe cu același număr de fructe. Așezăm toate fructele din prima lădiță în coșuri a câte 7 fructe și rămânem cu 5 fructe. Așezăm toate fructele din a doua lădiță în coșuri a câte 5 fructe și rămânem cu 4 fructe. Vom pune la un loc toate fructele din cele două lădițe, apoi le vom așeza în coșuri a câte 35. Câte fructe vor mai rămâne?

Soluție:

Notăm cu ***n*** numărul fructelor dintr-o lădiță. Atunci $n=7x+5$ **(**numărul fructelor din prima lădiță), iar $n=5y+4$ (numărul fructelor din a doua lădiță) (2p)
$n=7x+5$**.** Înmulțind această egalitate cu **5** vom avea: $5n=35x+25$
$n=5y+4$**.** Înmulțind această egalitate cu **7** vom avea: $7n=35y+28$. (2p)
Scădem cele două relații și obținem**:** $2n=35(y-x)+3$ (numărul fructelor din ambele lădițe). (2p)
Fructele rămase sunt în număr **de 3.** (1p)

SUBIECTUL III

Un număr natural de forma $\overline{ab}$ se numește ***“ Papiist 2022”*** dacă îndeplinește relația:
$\overline{aba}+2022\cdot\overline{ba}=\overline{aab}+2022\cdot\overline{ab}$

a) Verificați dacă numărul 12 este ***“Papiist 2022”***
b) Aflați toate numerele ***“Papiiste 2022”.***

Florica Gînța și Vasile Gînța, Tg.Mureș

Soluție:

a) $\overline{ab}=12\Longleftrightarrow a=1,b=2\Longleftrightarrow121+2022\cdot21=112+2022\cdot12\Longleftrightarrow$ (2p)

$\Longleftrightarrow 121-112+2022\cdot 21-2022\cdot 12=0 \Longleftrightarrow 9+2022\cdot(21-12)=0\ (F)$

Deci, 12 nu este număr ***"Papiist 2022".*** (1p)

b)

$\overline{aba}+2022\cdot\overline{ba}=\overline{aab}+2022\cdot\overline{ab} \Longleftrightarrow 100a+\overline{ba}+2022\cdot\overline{ba}=100a+\overline{ab}+2022\cdot\overline{ab} \Longleftrightarrow 2023\cdot\overline{ba}=2023\cdot\overline{ab} \Longleftrightarrow \overline{ba}=\overline{ab}$ (3p)

$\overline{ab}$ numere ***Papiiste 2022*** sunt: 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88 si 99. (1p)

SUBIECTUL IV

Aflați câte numere naturale consecutive (începând cu 1) trebuie să adunăm, pentru ca dublul sumei să fie egal cu ultimul termen mărit cu 4080400.

Gazeta matematică 2022

<u>Soluție:</u>

Fie ***n*** numărul numerelor. Atunci, $2\cdot(1+2+3+\ldots+n)=n+4080400$. (2p)

$2\cdot n\cdot(n+1):2=n+4080400$ (2p)

$n\cdot(n+1)-n=4080400$ (1p)

$n\cdot(n+1-1)=4080400$ (1p)

$n\cdot n=2020\cdot 2020 \Longleftrightarrow n=2020$ (1p)

NOTĂ: Orice altă rezolvare corectă a problemelor propuse se punctează cu 7 puncte.

CONCURSUL INTERJUDEȚEN DE MATEMATICĂ
„ ALEXANDRU PAPIU ILARIAN”
EDIȚIA a XXV-a
CLASA a VI-a
15.10.2022
SOLUȚII ȘI BAREME

SUBIECTUL I

a) Să se determine cifrele x,y,z în baza zece, știind că: $\frac{1}{x+2y+3z}=\overline{0,xy}$.

b) Fie A = $\{n=\overline{x,(y)}+\overline{y,(z)}+\overline{z,(x)} / x, y, z \text{ sunt cifre pare consecutive}\}$.

Să se determine A$\cap N$.

Soluție:

a) $x=0;\ y\cdot(2y+3z)=100 \Longrightarrow y$ ia valorile 1,2,4,5. Nu se obțin soluții.........1p

$x\neq 0 \Longrightarrow \overline{xy}\cdot(x+2y+3z)=100 \Longrightarrow \overline{xy}$ ia valorile 10, 20, 25, 50...................1p

Se obține: (x,y,z) ia valorile (1,0,3), (2,0,1)...1p

b) $n=x+y+z+\frac{x+y+z}{9}=x+x+2+x+4+\frac{x+x+2+x+4}{9}=$¿

¿$3x+6+\frac{3x+6}{9}=3(x+2)+\frac{x+2}{3}$ număr natural...1p

$\Longrightarrow 3/(x+2)$, x cifră pară nenulă$\Longrightarrow x=4, y=6, z=8$...............................1p

$n=x+y+z+\frac{x+y+z}{9}=x+x-2+x-4+\frac{x+x-2+x-4}{9}=$¿

¿$3x-6+\frac{3x-6}{9}=3(x-2)+\frac{x-2}{3}$ număr natural...1p

$\Longrightarrow 3/(x-2)$, x cifră pară nenulă$\Longrightarrow x=8, y=6, z=4$

A$\cap N=\{20\}$..1p

Dacă $n=x+y+z+\frac{x+y+z}{9}$, indiferent de ordinea cifrelor x,y,z obținem un singur număr n.

SUBIECTUL II

Fie numărul N= $23+23^2+23^3+\ldots+23^{2022}$. Determinați ultimele patru cifre ale numărului $5^4\cdot$N.

GM 6-7-8 2022 (Clasa a V-a)

Soluție:

N are 2022 de termeni, un număr par de termeni.

N= $(23+23^2)+(23^3+23^4)+\ldots+(23^{2021}+23^{2022})$……………………………..2p

N= $23\cdot(1+23)+23^3\cdot(1+23)+\ldots+23^{2021}\cdot(1+23)$……………………………1p

N = $24\cdot(23+23^3+23^5+\ldots+23^{2021})$……………………………………………1p

S are 1011 termeni i: S i, deci este număr impar.

N = 8 · 3S, deci N= 8 ·(2k+1)…………………………………………...………1p

$5^4 \cdot N = 5^3 \cdot 2^3 \cdot 5 \cdot (2k+1)$, deci $5^4 \cdot N = 10^3 \cdot 5 \cdot (2k+1)$………………………………1p

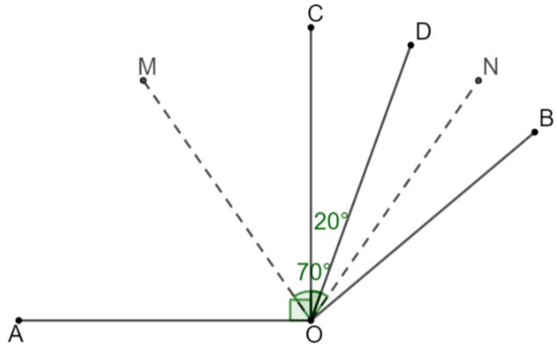
Prin urmare, ultimele 4 cifre ale lui $5^4 \cdot N$ sunt 5,0,0,0………………………………1p

SUBIECTUL III

Semidreptele (OC și (OD sunt situate în interiorul unghiului $\sphericalangle AOB$ asttfel încât măsura unghiului $\sphericalangle AOC=90^0$ și măsura $\sphericalangle COD=20^0$. Dacă (OM și (ON sunt bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle AOD$ și $\sphericalangle BOC$, iar măsura $\sphericalangle MON=70^0$, calculați măsura $\sphericalangle AOB$.

Soluție:

Avem două situații:



1) Dacă D este situat în interiorul $\sphericalangle BOC$

Avem $\sphericalangle AOD=\sphericalangle COA+\sphericalangle COD=90^0+20^0=110^0$. ...1p

Fiindcă (OM este este bisectoarea $\sphericalangle AOD$,avem $\sphericalangle AOM=\sphericalangle MOD=¿55^0$

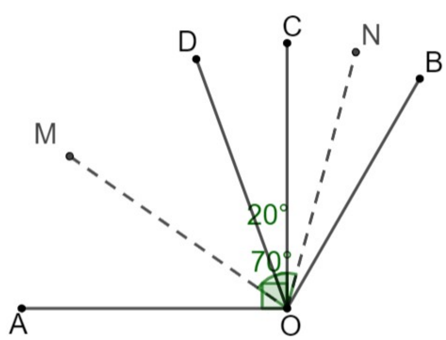
$\sphericalangle MOC=\sphericalangle MOD-\sphericalangle COD=55^0-20^0=35^0$ și

$\sphericalangle MON=70^0$

de unde $\sphericalangle CON=35^0$..2p

Atunci $\sphericalangle COB=2 \cdot 35^0=70^0$

$\sphericalangle AOB=\sphericalangle AOC+\sphericalangle COB=160^0$..1p



2) Dacă D este situat în interiorul unghiului AOC, avem
   $\sphericalangle AOD=\sphericalangle COA-\sphericalangle COD=90^0-20^0=70^0$………….1p
   Fiindcă (OM este este bisectoarea $\sphericalangle AOD$,avem
   $\sphericalangle AOM=\sphericalangle MOD=35^0$
   Din $\sphericalangle NOM=70^0$, obținem
   $\sphericalangle MOD+\sphericalangle DOC+\sphericalangle CON=70^0$
   De unde $\sphericalangle CON=70^0-55^0=15^0$
   ………………………………..1p
   Atunci $\sphericalangle COB=2\sphericalangle CON=30^0$ și $\sphericalangle AOB=\sphericalangle AOC+\sphericalangle COB=¿$
   $¿90^0+30^0=120^0$……………………………………………………………1p

Pentru tratarea corectă a unui caz, se acordă 4 puncte.

SUBIECTUL IV

Se consideră mulțimea $A \subset N$ ale cărei elemente verifică simultan relațiile:

a) $1 \in A$

b) Dacă $x \in A$, atunci $2x+3 \in A$

c) Dacă $3x+1 \in A$, atunci $x \in A$.

Demonstrați că numerele $20, 60, 61\, şi\, 2013$ se găsesc în A.

Soluție:

Deoarece $1 \in A b\underset{\Rightarrow}{¿¿} 2\cdot 1+3 \in A, 5 \in A,\ 5 \in A b\underset{\Rightarrow}{¿¿} 2\cdot 5+3 \in A, 13 \in A$

$13 \in A b\underset{\Rightarrow}{¿¿} 2\cdot 13+3 \in A, 29 \in A$, $29 \in A b\underset{\Rightarrow}{¿¿} 2\cdot 29+3 \in A, 61 \in A$, ………………1p

$61 \in A \Rightarrow 61=3\cdot 20+1 \in A c\underset{\Rightarrow}{¿¿} 20 A$;……………………………………………2p

$20 \in A b\underset{\Rightarrow}{¿¿} 2\cdot 20+3 \in A, 43 \in A$, $43 \in A b\underset{\Rightarrow}{¿¿} 2\cdot 43+3 \in A, 89 \in A$

$89 \in A b\underset{\Rightarrow}{¿¿} 2\cdot 89+3 \in A, 181 \in A$; $181 \in A \Rightarrow 181=3\cdot 60+1 \in A c\underset{\Rightarrow}{¿¿} 60 \in A \ldots\ldots 2p$

$60 \in A b\underset{\Rightarrow}{¿¿} 2\cdot 60+3 \in A, 123 \in A$; $123 \in A b\underset{\Rightarrow}{¿¿} 2\cdot 123+3 \in A, 249 \in A$

$249 \in A b\underset{\Rightarrow}{¿¿} 2\cdot 249+3 \in A, 501 \in A$; $501 \in A b\underset{\Rightarrow}{¿¿} 2\cdot 501+3 \in A, 1005 \in A$

$1005 \in A b\underset{\Rightarrow}{¿¿} 2\cdot 1005+3 \in A, 2013 \in A$……………………………………….………2p

CONCURSUL INTERJUDEȚEN DE MATEMATICĂ
„ Al. PAPIU ILARIAN”
EDIȚIA a XXV-a
CLASA a VII-a
15.10.2022
SOLUȚII ȘI BAREME

SUBIECTUL I

Se consideră numerele raționale strict pozitive a, b, c, astfel încât $\frac{2a+3b}{3a+2b}=\frac{18}{17}$ și $\frac{b+2c}{2b+c}=\frac{14}{13}$. Determinați numerele naturale n care au proprietatea că $a^n+b^n=c^n$.

Supliment – Gazeta matematica 2022

<u>Soluție:</u>

$\frac{2a+3b}{3a+2b}=\frac{18}{17} \Leftrightarrow 17(2a+3b)=18(3a+2b) \Leftrightarrow 34a+51b=54a+36b$

$\Leftrightarrow 20a=15b \Leftrightarrow \frac{a}{b}=\frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{a}{3}=\frac{b}{4}=k \Rightarrow a=3k \text{ și } b=4k$ **1p**

$\frac{b+2c}{2b+c}=\frac{14}{13} \Leftrightarrow 13(b+2c)=14(2b+c) \Leftrightarrow 13b+26c=28b+14c$

$\Leftrightarrow 15b=12c \Leftrightarrow \frac{b}{c}=\frac{4}{5} \Leftrightarrow c=5k$ **1p**

$a^n+b^n=c^n \Leftrightarrow (3k)^n+(4k)^n=(5k)^n \Leftrightarrow 3^n+4^n=5^n$ **1p**

Pentru $n=0 \Rightarrow 1+1=1$ fals

$n=1 \Rightarrow 3+4=7$ fals **1p**

$n=2 \Rightarrow 3^2+4^2=5^2 \Leftrightarrow 9+16=25$ adevărat **1p**

$n \geq 3$ avem: $3^n=3^2 \cdot 3^{n-2}<3^2 \cdot 5^{n-2}$

$4^n=4^2 \cdot 4^{n-2}<4^2 \cdot 5^{n-2}$

$\Rightarrow 3^n+4^n<9 \cdot 5^{n-2}+16 \cdot 5^{n-2}=25 \cdot 5^{n-2}=5^n$ **1p**

$\Rightarrow n=2$ soluție unică **1p**

SUBIECTUL II

a) Se consideră numerele naturale nenule a, b, c care verifică egalitatea:

$\frac{3a}{4b+5c}=\frac{4b}{5c+3a}=\frac{5c}{3a+4b}$

Demonstrați că $\sqrt{\frac{2}{a^2}+\frac{2}{b^2}+\frac{2}{c^2}} \in Q$

b) Să se arate că nu există numere reale distincte două câte două x_1, x_2, x_3, x_4 care verifică egalitățile:

$$|x_1-x_2|=|x_2-x_3|=|x_3-x_4|=|x_4-x_1|$$

Barem: a)

$$\frac{3a}{4b+5c}=\frac{4b}{5c+3a}=\frac{5c}{3a+4b}=\frac{3a+4b+5c}{2(3a+4b+5c)}=\frac{1}{2}$$ **1p**

$\Rightarrow 6a=4b+5c$ și $8b=5c+3a \Rightarrow 5c=6a-4b=8b-3a \Rightarrow 9a=12b \Rightarrow 3a=4b$ **1p**

Analog obținem $4b=5c \Rightarrow 3a=4b=5c=k$

$\Rightarrow a=\frac{k}{3}, b=\frac{k}{4}, c=\frac{k}{5}, k \in N^{¿}$

$\Rightarrow \sqrt{\frac{2}{a^2}+\frac{2}{b^2}+\frac{2}{c^2}}=\sqrt{2\left(\frac{9}{k^2}+\frac{16}{k^2}+\frac{25}{k^2}\right)}=\sqrt{2\cdot\frac{50}{k^2}}=\sqrt{\frac{100}{k^2}}=\frac{10}{k} \in Q$ **1p**

b) Vom face demonstrația prin reducere la absurd. Presupunem că există numere reale reale distincte două câte două x_1, x_2, x_3, x_4 care verifică egalitățile:

$$|x_1-x_2|=|x_2-x_3|=|x_3-x_4|=|x_4-x_1|$$

$\Rightarrow x_1-x_2=x_2-x_3$ **(1)** sau $x_1-x_2=x_3-x_2$ **(2)** **1p**

Din **(2)** $\Rightarrow x_1=x_3$ contradicție cu x_1, x_2, x_3, x_4 distincte două câte două

Din **(1) ⇒** $2x_2=x_1+x_3$ **(3)** **1p**

Analog din $|x_3-x_4|=|x_4-x_1|$ și $x_1 \neq x_3$ se obține $2x_4=x_1+x_3$ **(4)**

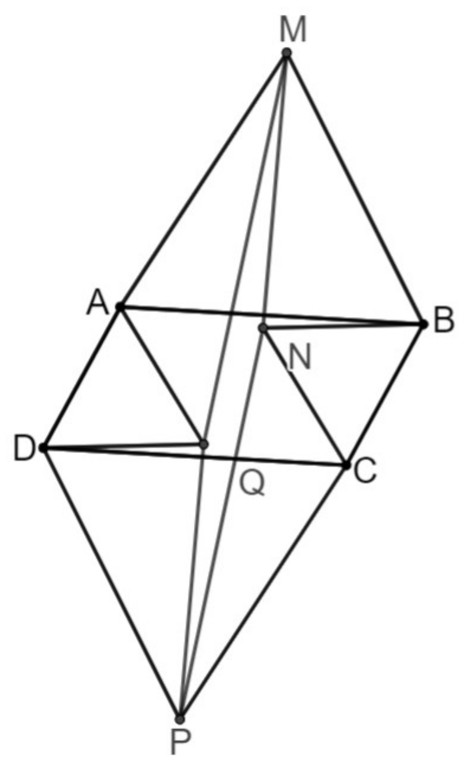
Din **(3)** și **(4) ⇒** $x_1=x_4$ contradicție cu x_1, x_2, x_3, x_4 distincte două câte două **1p**

⇒ presupunerea făcută este falsă ⇒ că nu există numere reale reale distincte două câte două x_1, x_2, x_3, x_4 care verifică egalitățile:

$$|x_1-x_2|=|x_2-x_3|=|x_3-x_4|=|x_4-x_1|$$ **1p**

SUBIECTUL III

Pe laturile opuse AB și CD ale unui paralelogram $ABCD$se construiesc în exteriorul său triunghiurile echilaterale ABM și CDP, iar pe laturile BC și DA se construiesc spre interiorul paralelogramului triunghiurile echilaterale BCNși DAQ. Dacă $AC+BD=25\,cm$ să se studieze natura patrulaterului $MNPQ$ și să se calculeze perimetrul său.



Barem:

$\sphericalangle DCB=\sphericalangle PCN=\sphericalangle DCN+60$, $DC\equiv PC, CN\equiv BC \Rightarrow$

$L.U.L \underset{\Rightarrow}{} \Delta DCB\equiv\Delta PNC \Rightarrow NP\equiv DB$ (1) **(1p)**

$\sphericalangle DAB=\sphericalangle QAM=\sphericalangle QAB+60$, $AD\equiv AQ, AB\equiv AM \Rightarrow$

$L.U.L \underset{\Rightarrow}{} \Delta DAB\equiv\Delta QAM \Rightarrow QM\equiv DB$ (2) **(1p)**

Din (1) și (2) $\Rightarrow NP\equiv QM\equiv DB$ (3) **(1p)**

Analog se demosntrează că $\Delta DPQ\equiv\Delta DCA$ și $\Delta MNB\equiv\Delta ACB$

$\Rightarrow PQ\equiv MN\equiv AC$ (4) **(3p)**

Din (3) și (4) $\Rightarrow MNPQ$ paralelogram cu laturile egale cu diagonalele AC și BD ale paralelogramului $ABCD$

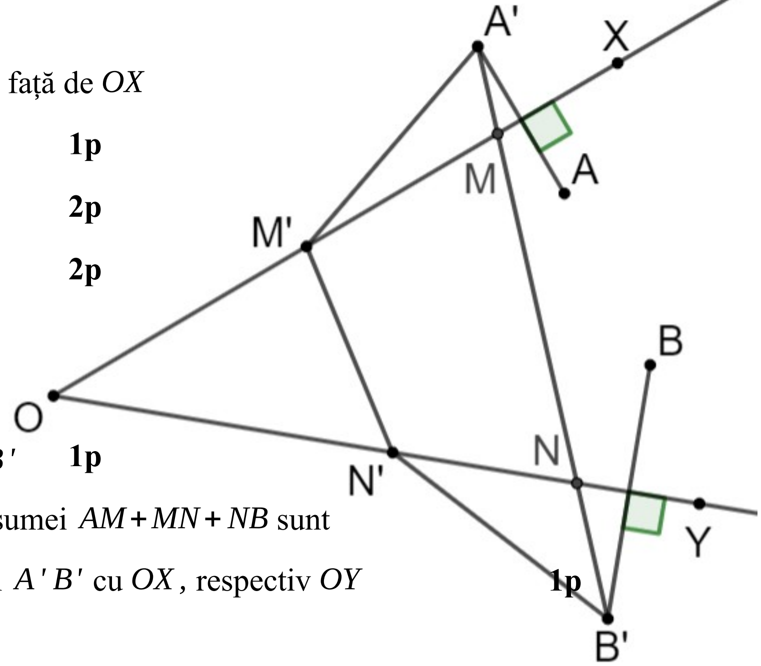
$\Rightarrow P_{MNPQ} = 2(AC + BD) = 2 \cdot 25 = 50\,cm$ **1p**

SUBIECTUL IV

În interiorul unghiului XOY cu măsura mai mică de 45 se află două puncte A și B. Determinați poziția punctelor $M \in OX$ și $N \in OY$, astfel încât suma $AM + MN + NB$ să fie minimă.

Barem:

Fără a restrânge generalitatea putem considera că A este mai apropiat de OX și B este mai apropiat de OY



Considerăm punctul A' simetricul punctului A față de OX

și B' simetricul punctului B față de OY **1p**

$\Rightarrow A'M = AM$ și $B'N = BN$ **2p**

$\Rightarrow AM + MN + NB = A'B'$ **2p**

Pentru orice altă poziție a punctelor M și N,

de exemplu, M' și N' avem:

$AM' + M'N' + N'B = A'M' + M'N' + N'B' > A'B'$ **1p**

$\Rightarrow$ punctele pentru care se realizează minumul sumei $AM + MN + NB$ sunt

Punctele M și N obținute din intersecția dreptei $A'B'$ cu OX, respectiv OY **1p**

CONCURSUL INTERJUDEȚEN DE MATEMATICĂ
„ ALEXANDRU PAPIU ILARIAN”
EDIȚIA a XXV-a
CLASA a VIII-a
15.10.2022
SOLUȚII ȘI BAREME

SUBIECTUL I

a) Fie intervalul $I=(a,b), a<b$. Dacă $I\cap Z=\{2022,2023\}$,să se calculeze $|a-2021|-|2023-b|+|b-a|$.

b) Dacă $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x să se rezolve ecuația :

$$\frac{[x+1]+1}{[x+1]-1}=x$$

Soluție:

a) $I\cap Z=\{2022,2023\}$ implică $2022>a\geq 2021, 2023<b\leq 2024$ 1p
a < b, deci b − a > 0

$|a-2021|-|2023-b|+b-a=(a-2021)-(b-2023)+(b-a)=$¿

¿$a-2021-b+2023+b-a=2$...2p

b) Fie $[x+1]=k$, deci $x=\frac{k+1}{k-1}$ și $k\leq x+1<k+1$...1p

$\Rightarrow k\leq\frac{2k}{k-1}<k+1\Rightarrow k\in\{0,3\}\Rightarrow x\in\{-1,2\}$ 3p

SUBIECTUL II

Aflați valoarea maximă a sumei S și valoarea numărului lui x pentru care se realizează acest maxim: S=$\sqrt{2022-x}+\sqrt{x-2004}$

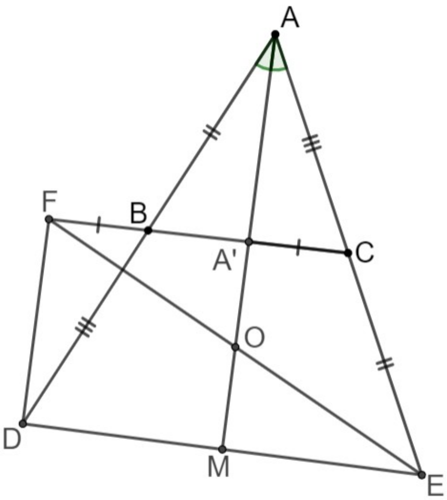
Soluție:

Din condiția de existență 2022-x≥0 și x-2004≥0 rezultă x $\in[2004,2022]$………1p
Ridicăm suma la pătrat și obținem
S^2=2022-x+x-2004+2$\sqrt{(2022-x)(x-2004)}$..2p
S^2=18+2$\sqrt{(2022-x)(x-2004)}$ ≤18+2022-x+x-2004 (pe baza inegalității mediilor
Adică $S^2\leq 36$)..2p
Egalitatea se realizează dacă 2022-x=x-2004 adică x=2013..1p
Valoarea maximă a sumei se realizează pentru x=2013 , x $\in[2004,2022]$și reprezintă S=
$\sqrt{2022-2013}+\sqrt{2013-2004}=3+3=6$
deci S maxim =6 , pentru x=2013..1p

SUBIECTUL III

Fie triunghiul ABC oarecare, ¿și punctele coliniare A, C, E, $C \in (AE)$ și B,C,F coliniare $B \in (CF)$ astfel încăt CE=AB și BF =A'C.

Demonstrați că AA' trece prin mijlocul segmentului EF.



Soluție:

Fie D astfel încât triunghiul ADE isoscel, BD=AC, CE=AB, AD=AE…...1p

$A A'$ bisectoare ⇒M mijlocul lui DE, $A A' \cap DE = \{M\}$

$\Delta\, ABC\, \underset{\Rightarrow}{T.\, bisectoarei} \frac{A'C}{A'B} = \frac{AC}{AB}$……………………………….2p

BF =A'C, AC=BD⇒$\frac{BF}{A'B} = \frac{BD}{AB}$, ¿ $FBD =$ ¿ ABC (opuse la vârf),

$\Delta\, BDF \sim \Delta\, BA\, A'$………2p

⇒¿ $FDB =$ ¿ $BA\, A' \Rightarrow AM \parallel DF$, $A\, A' \cap EF = \{O\}$, M mijlocul lui DE………………………1p

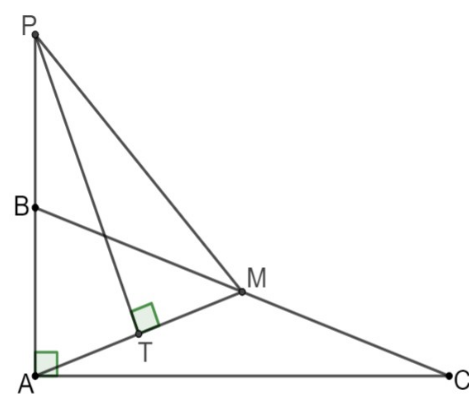
MO$\parallel DF \Rightarrow MO$ *linie mijlocie în* $\Delta \overset{def}{=} \Rightarrow O$ *mijlocul lui* EF………………………………1p

SUBIECTUL IV

În triunghiul dreptunghic ABC cu unghiul A=90^0 mediatoarea medianei AM ,

M$\in BC$intersectează dreapta AB în punctul P. Demonstrați că $BC^2 = 4 \cdot AB \cdot$AP

Soluție:



Considerăm două situații:

I. Dacă mediatoarea intersectează prelungirea laturii AB

Notăm AM=2a

Dacă T este mijlocul segmentului AM, atunci AT=TM=a

Triunghiul ABC dreptunghic , AM=2a, rezultă BC=4a 1p

Triunghiul BAM isoscel$\Rightarrow \sphericalangle ABM \equiv \sphericalangle MAB$

Triunghiul CAM isoscel$\Rightarrow \sphericalangle MAC \equiv \sphericalangle MCA$ 1p

Notăm $\sphericalangle ABM =$ ¿u^0 $\Rightarrow \sphericalangle MAC = 90^0 - u^0 = \sphericalangle MCA$

Triunghiurile PAT și CBA asemenea (cazul UU).......................1p

$$\Rightarrow \frac{AP}{CB} = \frac{AT}{BA} = \frac{PT}{CA} \Rightarrow \frac{AP}{4a} = \frac{a}{BA}$$

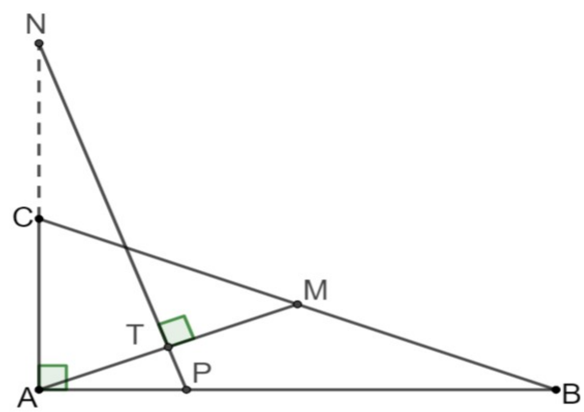
de unde AB$\cdot AP = 4a^2$, 4AB$\cdot AP = 16a^2 = (4a)^2$

Dar BC=4a deci $BC^2 = 4 \cdot AB \cdot AP$ 1p

II. Dacă mediatoarea intersectează latura AB

Folosim aceleași notații ca în situația anterioară, AM=2a, BC=4a, TA=TB=a

notăm $\sphericalangle ACB =$ ¿u^0



Triunghiul CAM isoscel$\Rightarrow \sphericalangle MAC \equiv \sphericalangle MCA$ 1p

In triunghiul ATP, $\sphericalangle TAP = 90^0 - u^0$, $\sphericalangle TPA = u^0$deci

triunghiurile ATP și BAC sunt asemenea(U.U) , ...1p

de unde avem

$\frac{AP}{AB} = \frac{TP}{AC} = \frac{AP}{BC} \Rightarrow \frac{a}{BA} = \frac{AP}{4a}$ deci AB$\cdot AP = 4a^2$, 4AB $\cdot AP = 16a^2 = (4a)^2$

Dar BC=4a deci $BC^2 = 4 \cdot AB \cdot AP$ 1p