

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Determinați numerele reale a și b pentru care $(a + bi)(1 + i) = 4$, unde $i^2 = -1$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = mx^2 - 2x + m$, unde m este număr real nenul. Determinați numerele reale m pentru care $f(m - x) = f(m + x)$, pentru orice număr real x .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2\log_2(2x) - 1 = \log_2(x^2 + x + 2)$.
- 5p** 4. Se consideră mulțimile $A = \{1, 2, 3, 4\}$ și $F = \{f | f: A \rightarrow A\}$. Determinați probabilitatea ca, alegând un element f din mulțimea F , acesta să verifice inegalitatea $f(n) \leq n$, pentru orice $n \in A$.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(5, 3)$ și $B(-1, 5)$. Determinați coordonatele punctului C , știind că $\overline{CA} + \overline{CB} = 2\overline{OC}$.
- 5p** 6. Se consideră triunghiul ABC , cu $AB = 8$, măsura unghiului C de 30° și punctul O , centrul cercului circumscris triunghiului ABC . Determinați distanța de la punctul O la latura AB .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 3 & a & -2 \\ 2a+1 & 1-a & -1 \\ a+2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} 3x + ay - 2z = b \\ (2a+1)x + (1-a)y - z = c \\ (a+2)x - 2y + z = -1 \end{cases}$, unde a, b și c sunt numere reale.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(0)) = 5$.
- 5p** b) Determinați numerele reale a pentru care matricea $A(a)$ este inversabilă.
- 5p** c) Determinați numerele reale b și c pentru care sistemul de ecuații este compatibil, oricare ar fi numărul real a .
2. Se consideră polinomul $f = X^4 + aX^3 + aX^2 + 8X - 8$, unde a este număr real.
- 5p** a) Arătați că $f(-1) = -15$, pentru orice număr real a .
- 5p** b) Determinați numărul real a pentru care restul împărțirii polinomului f la polinomul $g = X^2 - 1$ este egal cu $15X$.
- 5p** c) Arătați că, pentru orice număr real a , polinomul f **nu** are toate rădăcinile numere întregi.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - x - (x^4 - 1)\arctg x$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = -x^2(4x\arctg x + 1)$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f care este paralelă cu axa Ox .
- 5p** c) Demonstrați că $\operatorname{tg}(f(x)) \geq f(x) \geq f(\operatorname{tg} x)$, pentru orice $x \in [0, 1]$.

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + e^x}{1 + e^{-x}}$.

5p a) Arătați că $\int_0^3 (1 + e^{-x}) f(x) dx = 8 + e^3$.

5p b) Arătați că $\int_{-m}^m \frac{f(x)}{x^2 + e^x} dx = m$, pentru orice $m \in (0, +\infty)$.

5p c) Determinați numărul real nenul a pentru care $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{e^{ax} - 1} \int_0^x f(t) dt \right) = 1$.

Examenul național de bacalaureat 2023

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$a - b + (a + b)i = 4$, de unde obținem $a - b = 4$ și $a + b = 0$ $a = 2$ și $b = -2$	3p 2p
2.	$m(m - x)^2 - 2(m - x) + m = m(m + x)^2 - 2(m + x) + m \Rightarrow x(m^2 - 1) = 0$ și, cum egalitatea are loc pentru orice număr real x , obținem $m^2 - 1 = 0$ $m = -1$ sau $m = 1$, care convin	3p 2p
3.	$\log_2(2x^2) = \log_2(x^2 + x + 2)$, de unde obținem $x^2 - x - 2 = 0$ $x = -1$, care nu convine; $x = 2$, care convine	3p 2p
4.	Mulțimea F are $4^4 = 256$ de elemente, deci sunt 256 de cazuri posibile Pentru fiecare $n \in A$, $f(n)$ se poate alege în n moduri, deci sunt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ de cazuri favorabile, de unde obținem $p = \frac{24}{256} = \frac{3}{32}$	2p 3p
5.	$\overline{CM} = \frac{1}{2}(\overline{CA} + \overline{CB})$, unde M este mijlocul segmentului AB , de unde obținem $\overline{CM} = \overline{OC}$, deci punctul C este mijlocul segmentului OM Cum $x_M = 2$ și $y_M = 4$, obținem $x_C = 1$ și $y_C = 2$	3p 2p
6.	$\frac{AB}{\sin C} = 2R \Rightarrow R = \frac{AB}{2 \sin C} = \frac{8}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 8$, unde R este raza cercului circumscris triunghiului ABC Triunghiul OAB este echilateral cu latura egală cu 8, deci distanța de la punctul O la latura AB este $OM = 4\sqrt{3}$, unde M este mijlocul segmentului AB	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(0) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(0)) = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} =$ $= 3 + 4 + 0 + 4 - 6 - 0 = 5$	2p 3p
b)	$\det(A(a)) = \begin{vmatrix} 3 & a & -2 \\ 2a+1 & 1-a & -1 \\ a+2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 5(1+a)(1-a)$, pentru orice număr real a $\det(A(a)) = 0 \Leftrightarrow a = -1$ sau $a = 1$, deci matricea $A(a)$ este inversabilă dacă și numai dacă $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$	2p 3p

c)	<p>Pentru $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, sistemul de ecuații este compatibil, oricare ar fi numerele reale b și c;</p> <p>pentru $a \in \{-1, 1\}$, $\begin{vmatrix} a & -2 \\ 1-a & -1 \end{vmatrix} \neq 0$, deci sistemul este compatibil dacă și numai dacă</p> $\begin{vmatrix} -1 & -2 & b \\ 2 & -1 & c \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \text{ și } \begin{vmatrix} 1 & -2 & b \\ 0 & -1 & c \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$ <p>$b = 2$ și $c = 1$</p>	3p 2p
2.a)	$f(-1) = (-1)^4 + a \cdot (-1)^3 + a \cdot (-1)^2 + 8 \cdot (-1) - 8 =$ $= 1 - a + a - 8 - 8 = -15$, pentru orice număr real a	3p 2p
b)	<p>Restul împărțirii polinomului f la polinomul g este egal cu $(a+8)X + a - 7$, pentru orice număr real a</p> <p>$(a+8)X + a - 7 = 15X$, de unde obținem $a = 7$</p>	3p 2p
c)	<p>Presupunând că rădăcinile x_1, x_2, x_3, x_4 ale polinomului f sunt numere întregi, cum $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -a$, obținem că $a \in \mathbb{Z}$</p> <p>$x_1 x_2 x_3 x_4 = -8 \Rightarrow x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = 8$, de unde obținem că cel puțin o rădăcină a polinomului f are modulul egal cu 1 și, cum $f(-1) \neq 0$ pentru orice număr real a, obținem $f(1) = 0$, deci $a = -\frac{1}{2}$, ceea ce este fals, deci polinomul f nu are toate rădăcinile numere întregi</p>	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = -1 - 4x^3 \arctg x - (x^4 - 1) \cdot \frac{1}{x^2 + 1} =$ $= -1 - 4x^3 \arctg x - x^2 + 1 = -x^2 (4x \arctg x + 1)$, $x \in \mathbb{R}$	3p 2p
b)	<p>Tangenta la graficul funcției f în punctul $A(x_0, f(x_0))$ este paralelă cu axa $Ox \Leftrightarrow f'(x_0) = 0$</p> <p>$-x_0^2 (4x_0 \arctg x_0 + 1) = 0$ și, cum $x_0 \arctg x_0 \geq 0$ pentru orice $x_0 \in \mathbb{R}$, obținem $x_0 = 0$, deci ecuația tangentei la graficul funcției f care este paralelă cu axa Ox este $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$, adică $y = 1$</p>	2p 3p
c)	<p>$f'(x) \leq 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, deci funcția f este descrescătoare pe \mathbb{R} și, cum $f(0) = 1$ și $f(1) = 0$, obținem $0 \leq f(x) \leq 1$, pentru orice $x \in [0, 1]$</p> <p>Pentru $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \operatorname{tg} x - x$, $g'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \geq 0$, pentru orice $x \in [0, 1]$, deci g este crescătoare, de unde obținem $\operatorname{tg} x \geq x$, pentru orice $x \in [0, 1]$, deci $\operatorname{tg}(f(x)) \geq f(x) \geq f(\operatorname{tg} x)$, pentru orice $x \in [0, 1]$</p>	2p 3p
2.a)	$\int_0^3 (1 + e^{-x}) f(x) dx = \int_0^3 (x^2 + e^x) dx = \left(\frac{x^3}{3} + e^x \right) \Big _0^3 =$ $= \frac{27}{3} + e^3 - 0 - 1 = 8 + e^3$	3p 2p
b)	$\int_{-m}^m \frac{f(x)}{x^2 + e^x} dx = \int_{-m}^m \frac{1}{1 + e^{-x}} dx = \int_{-m}^m \frac{(e^x + 1)'}{e^x + 1} dx =$ $= \ln(1 + e^x) \Big _{-m}^m = \ln(1 + e^m) - \ln\left(\frac{1 + e^m}{e^m}\right) = \ln e^m = m$, pentru orice $m \in (0, +\infty)$	3p 2p

c)	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{e^{ax} - 1} \int_0^x f(t) dt \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\int_0^x f(t) dt \right)'}{(e^{ax} - 1)'} =$ $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{ae^{ax}} = \frac{1}{2a}, \text{ de unde obținem } \frac{1}{2a} = 1, \text{ deci } a = \frac{1}{2}, \text{ care convine}$	2p 3p
-----------	--	----------------------------