Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Arătați că numerele $5-2\sqrt{6}$, 1 și $5+\sqrt{24}$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.
5p	**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+1$, unde a este număr real nenul. Determinați numărul real nenul a pentru care $(f\circ f)(1)=1$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^x\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{2-x}=32$.
5p	**4.** Determinați numărul de submulțimi ordonate, cu câte două elemente, care se pot forma cu elementele mulțimii $M=\{0,1,2,3,4\}$.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-2,1)$ și $B(2,5)$. Determinați ecuația dreptei d care trece prin punctul B și este perpendiculară pe dreapta AB.
5p	**6.** Arătați că $(\operatorname{tg}x+1)(\operatorname{ctg}x-1)=2\operatorname{ctg}2x$, pentru orice $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & 1 & a+1 \\ 1 & a & -1 \\ 2 & -a & 4 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} ax+y+(a+1)z=a \\ x+ay-z=4 \\ 2x-ay+4z=-4 \end{cases}$, unde a este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det(A(1))=-9$.
5p	**b)** Determinați mulțimea valorilor reale ale lui a pentru care sistemul are soluție unică.
5p	**c)** Arătați că, dacă sistemul are soluția unică (x_0,y_0,z_0), atunci $x_0+y_0+z_0=2$.
	2. Se consideră polinomul $f=X^3-3X^2+2X+m$, unde m este număr real.
5p	**a)** Pentru $m=6$, arătați că $f(-1)=0$.
5p	**b)** Determinați numărul real m pentru care polinomul f este divizibil cu polinomul $g=X^2+2$.
5p	**c)** Determinați numărul real m pentru care $x_1^3+x_2^3+x_3^3=0$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\frac{\sqrt{x+1}}{e^x}$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=1-\frac{2x+1}{2e^x\sqrt{x+1}}$, $x\in(-1,+\infty)$.
5p	**b)** Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f.
5p	**c)** Demonstrați că $f(x)-x\le\sqrt{\frac{e}{2}}$, pentru orice $x\in(-1,+\infty)$.
	2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+x\ln x$.
5p	**a)** Arătați că $\int_1^2 3(f(x)-x\ln x)\,dx=7$.

5p **b)** Arătați că $\int_1^e \frac{f(x)}{x^3}\,dx = 2\left(1-\frac{1}{e}\right)$.

5p **c)** Arătați că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{x+1}{f(x)}$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=e$ are aria strict mai mare decât 1.

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\left(5-2\sqrt{6}\right)\left(5+\sqrt{24}\right)=\left(5-\sqrt{24}\right)\left(5+\sqrt{24}\right)=5^2-\sqrt{24}^2=$	**3p**
	$=25-24=1^2$, deci numerele $5-2\sqrt{6}$, 1 și $5+\sqrt{24}$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice	**2p**
2.	$f(1)=a+1$, $(f\circ f)(1)=a(a+1)+1$, pentru orice număr real nenul a	**3p**
	$a(a+1)+1=1$, deci $a(a+1)=0$ și, cum a este număr real nenul, obținem $a=-1$	**2p**
3.	$2^x\cdot 2^{-4+2x}=32\Rightarrow 2^{3x-4}=2^5$, de unde obținem $3x-4=5$	**3p**
	$x=3$	**2p**
4.	$A_5^2=\dfrac{5!}{3!}=$	**3p**
	$=4\cdot 5=20$	**2p**
5.	$m_{AB}=1$ și, cum $d\perp AB$, obținem $m_d=-1$	**3p**
	Ecuația dreptei d este $y-5=-1(x-2)$, adică $y=-x+7$	**2p**
6.	$(\operatorname{tg}x+1)(\operatorname{ctg}x-1)=\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}+1\right)\left(\dfrac{\cos x}{\sin x}-1\right)=\dfrac{\cos^2x-\sin^2x}{\cos x\sin x}=$	**2p**
	$=\dfrac{\cos 2x}{\frac{1}{2}\sin 2x}=2\operatorname{ctg}2x$, pentru orice $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&1&-1\\2&-1&4\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(1))=\begin{vmatrix}1&1&2\\1&1&-1\\2&-1&4\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=4-2-2-4-1-4=-9$	**3p**
b)	$\det(A(a))=\begin{vmatrix}a&1&a+1\\1&a&-1\\2&-a&4\end{vmatrix}=-3a-6$, pentru orice număr real a	**2p**
	$\det(A(a))=0\Leftrightarrow a=-2$; sistemul de ecuații are soluție unică $\Leftrightarrow a\in\mathbb{R}\setminus\{-2\}$	**3p**
c)	Adunând ultimele două ecuații ale sistemului, obținem $x_0+z_0=0$	**2p**
	$y_0+z_0=a$, $ay_0-2z_0=4$, deci $(a+2)(y_0-2)=0$ și, cum $a\in\mathbb{R}\setminus\{-2\}$, obținem $y_0=2$, deci $x_0+y_0+z_0=2$	**3p**
2.a)	$f=X^3-3X^2+2X+6\Rightarrow f(-1)=(-1)^3-3(-1)^2+2(-1)+6=$	**3p**
	$=-1-3-2+6=0$	**2p**

b)	$f=(X-3)\left(X^2+2\right)+6+m$, pentru orice număr real m f este divizibil cu polinomul g dacă $6+m=0$, de unde obținem $m=-6$	**3p** **2p**
c)	$x_1+x_2+x_3=3$ și $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=2$, deci $x_1^2+x_2^2+x_3^2=5$ și $x_1^3+x_2^3+x_3^3=9-3m$, pentru orice număr real m $9-3m=0$, deci $m=3$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=1+\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\cdot e^x-\sqrt{x+1}\cdot e^x}{e^{2x}}=$ $=1+\dfrac{1-2x-2}{2e^x\sqrt{x+1}}=1-\dfrac{2x+1}{2e^x\sqrt{x+1}}$, $x\in(-1,+\infty)$	**3p** **2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{e^x}\sqrt{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}\right)=1$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+1}}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2e^x\sqrt{x+1}}=0$, deci dreapta de ecuație $y=x$ este asimptota oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f	**2p** **3p**
c)	$g:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-x\Rightarrow g'(x)=-\dfrac{2x+1}{2e^x\sqrt{x+1}}$; $g'(x)=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$ $g'(x)\geq 0$ pentru orice $x\in\left(-1,-\dfrac{1}{2}\right]\Rightarrow g$ este crescătoare pe $\left(-1,-\dfrac{1}{2}\right]$, $g'(x)\leq 0$ pentru orice $x\in\left[-\dfrac{1}{2},+\infty\right)\Rightarrow g$ este descrescătoare pe $\left[-\dfrac{1}{2},+\infty\right)$, deci $g(x)\leq g\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ pentru orice $x\in(-1,+\infty)$ și, cum $g\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\dfrac{e}{2}}$, obținem $f(x)-x\leq\sqrt{\dfrac{e}{2}}$, pentru orice $x\in(-1,+\infty)$	**2p** **3p**
2.a)	$\int_1^2 3\left(f(x)-x\ln x\right)dx=\int_1^2 3x^2\,dx=x^3\Big\|_1^2=$ $=8-1=7$	**3p** **2p**
b)	$\int_1^e\dfrac{f(x)}{x^3}dx=\int_1^e\dfrac{1}{x}dx+\int_1^e\left(-\dfrac{1}{x}\right)'\ln x\,dx=\ln x\Big\|_1^e-\dfrac{\ln x}{x}\Big\|_1^e+\int_1^e\dfrac{1}{x^2}dx=$ $=1-\dfrac{1}{e}-\dfrac{1}{x}\Big\|_1^e=2-\dfrac{2}{e}=2\left(1-\dfrac{1}{e}\right)$	**3p** **2p**
c)	$g(x)=\dfrac{x+1}{x^2+x\ln x}\geq 0$, pentru orice $x\in[1,e]$, deci $\mathcal{A}=\int_1^e\|g(x)\|dx=\int_1^e\dfrac{x+1}{x^2+x\ln x}dx=$ $=\int_1^e\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\cdot\dfrac{1}{x+\ln x}dx=\int_1^e(x+\ln x)'\cdot\dfrac{1}{x+\ln x}dx=\ln(x+\ln x)\Big\|_1^e=\ln(e+1)>\ln e=1$	**2p** **3p**