Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

Model

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați termenul a_1 al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_2 = 7$ și $a_6 = 23$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=8x-5$. Determinați numărul real a pentru care punctul $A(a,3a)$ aparține graficului funcției f.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_4 x+\log_4(3x)=\log_4 12$.

5p **4.** Determinați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea numerelor naturale de două cifre, $\sqrt{n}$ să fie număr natural par.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-3,2)$, $B(1,4)$ și $C(6,0)$. Determinați distanța dintre mijloacele segmentelor AB și OC.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu $BC=16$ și măsura unghiului B egală cu $30°$. Arătați că aria triunghiului ABC este egală cu $32\sqrt{3}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}-3 & 3\\ -2 & -1\end{pmatrix}$ și $B(x)=\begin{pmatrix}x+1 & -3\\ 2 & x-1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det A=9$.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $B(3)\cdot B(4)=xB(1)$.

5p **c)** Determinați numărul real a pentru care matricea $B(a)$ este inversa matricei $C=\frac{1}{9}A$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3+X^2+mX-4$, unde m este număr real.

5p **a)** Pentru $m=1$, arătați că $f(2)=10$.

5p **b)** Pentru $m=-4$, determinați rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Demonstrați că, pentru orice număr natural nenul m, polinomul f **nu** are toate rădăcinile reale.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2-2x+1}{x+2}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{x^2+4x-5}{(x+2)^2}$, $x\in(-2,+\infty)$.

5p **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{e^x}=0$.

5p **c)** Demonstrați că funcția f este convexă.

2. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+1+\frac{1}{\sqrt{x+1}}$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^3\left(f(x)-\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)dx=6$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^8\left(f(x)-x-1\right)dx=4$.

5p **c)** Arătați că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[0,3]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$, este egal cu $\pi\left(\frac{91}{3}+\ln 4\right)$.

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Model

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a_6 = a_2 + 4r$, deci $4r = 16$, de unde obținem $r = 4$, unde r este rația progresiei aritmetice	**3p**
	$a_1 = a_2 - r = 7 - 4 = 3$	**2p**
2.	$f(a) = 3a \Leftrightarrow 8a - 5 = 3a$	**3p**
	$a = 1$	**2p**
3.	$\log_4\left(3x^2\right) = \log_4 12$, de unde obținem $3x^2 = 12$	**3p**
	$x = -2$, care nu convine; $x = 2$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	Numerele naturale n, de două cifre, pentru care $\sqrt{n}$ este număr natural par sunt 16, 36 și 64, deci sunt 3 cazuri favorabile, de unde obținem $p = \frac{3}{90} = \frac{1}{30}$	**3p**
5.	$M(-1,3)$ și $N(3,0)$, unde punctele M și N sunt mijloacele segmentelor AB, respectiv OC	**2p**
	$MN = \sqrt{(3+1)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{25} = 5$	**3p**
6.	$\sin B = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{AC}{16}$, deci $AC = 8$	**2p**
	$AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = 8\sqrt{3}$ și, cum $\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2}$, obținem $\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{8 \cdot 8\sqrt{3}}{2} = 32\sqrt{3}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \cdot (-1) - 3 \cdot (-2) =$	**3p**
	$= 3 + 6 = 9$	**2p**
b)	$B(3) = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ și $B(4) = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow B(3) \cdot B(4) = \begin{pmatrix} 14 & -21 \\ 14 & 0 \end{pmatrix} =$	**3p**
	$= 7\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 7B(1)$, de unde obținem $x = 7$	**2p**
c)	$C \cdot B(a) = \begin{pmatrix} \frac{-a+1}{3} & \frac{a+2}{3} \\ \frac{-2a-4}{9} & \frac{-a+7}{9} \end{pmatrix}$, pentru orice număr real a	**2p**
	$C \cdot B(a) = B(a) \cdot C = I_2$, de unde obținem $a = -2$	**3p**

2.a)	$f = X^3 + X^2 + X - 4 \Rightarrow f(2) = 2^3 + 2^2 + 2 - 4 =$	**3p**
	$= 8 + 4 + 2 - 4 = 10$	**2p**
b)	$f = X^3 + X^2 - 4X - 4 \Rightarrow f = (X+1)(X-2)(X+2)$	**2p**
	Rădăcinile polinomului f sunt -2, -1 și 2	**3p**
c)	$x_1 + x_2 + x_3 = -1$, $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = m \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 - 2m$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f	**3p**
	Cum m este număr natural nenul, obținem $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 0$, deci polinomul f **nu** are toate rădăcinile reale	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = \dfrac{(2x-2)(x+2) - (x^2 - 2x + 1)\cdot 1}{(x+2)^2} =$	**3p**
	$= \dfrac{2x^2 + 4x - 2x - 4 - x^2 + 2x - 1}{(x+2)^2} = \dfrac{x^2 + 4x - 5}{(x+2)^2}$, $x \in (-2, +\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{e^x(x+2)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x-2}{e^x(x+3)} =$	**3p**
	$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{e^x(x+4)} = 0$	**2p**
c)	$f''(x) = \dfrac{18}{(x+2)^3}$, $x \in (-2, +\infty)$	**3p**
	$f''(x) > 0$, pentru orice $x \in (-2, +\infty)$, de unde obținem că funcția f este convexă	**2p**
2.a)	$\displaystyle\int_1^3 \left(f(x) - \frac{1}{\sqrt{x+1}} \right) dx = \int_1^3 (x+1)\, dx = \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \Bigg\|_1^3 =$	**3p**
	$= \dfrac{9}{2} + 3 - \dfrac{1}{2} - 1 = 6$	**2p**
b)	$\displaystyle\int_0^8 (f(x) - x - 1)\, dx = \int_0^8 \frac{1}{\sqrt{x+1}}\, dx = 2\int_0^8 (x+1)' \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+1}}\, dx = 2\sqrt{x+1}\,\Big\|_0^8 =$	**3p**
	$= 2 \cdot 3 - 2 \cdot 1 = 4$	**2p**
c)	$\displaystyle V = \pi \int_0^3 g^2(x)\, dx = \pi \int_0^3 \left((x+1)^2 + 2\sqrt{x+1} + \frac{1}{x+1} \right) dx =$	**2p**
	$\displaystyle = \pi \int_0^3 (x+1)' \left((x+1)^2 + 2\sqrt{x+1} + \frac{1}{x+1} \right) dx = \pi \left(\frac{(x+1)^3}{3} + 4 \cdot \frac{(x+1)\sqrt{x+1}}{3} + \ln(x+1) \right) \Bigg\|_0^3 =$ $= \pi \left(\dfrac{64}{3} + \dfrac{32}{3} + \ln 4 - \dfrac{1}{3} - \dfrac{4}{3} \right) = \pi \left(\dfrac{91}{3} + \ln 4 \right)$	**3p**