

**Examenul de bacalaureat național 2023**  
**Proba E. c)**

**Matematică  $M_{pedagogic}$**

**Model**

*Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățător-educatoare*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

- 5p 1. Arătați că  $\left(\frac{2}{5}\right)^{-1} + 2\frac{1}{2} = 5$ .
- 5p 2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x + 1$ . Determinați numărul real  $a$  pentru care  $f(a)$  este media aritmetică a numerelor  $f(1)$  și  $f(5)$ .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $2\sqrt{x-1} + 3 = 5$ .
- 5p 4. Determinați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea  $M = \{1, 2, 3, \dots, 2022\}$ , acesta să fie multiplu de 2.
- 5p 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(1, 3)$ ,  $B(-2, -1)$  și  $C(1, -1)$ . Arătați că triunghiul  $ABC$  este dreptunghic.
- 5p 6. Lungimea razei cercului circumscris triunghiului  $ABC$  este 5, iar  $BC = 10$ . Calculați  $\sin A$ .

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă  $x \circ y = xy + 8(x + y) + 56$ .

- 5p 1. Arătați că  $(-5) \circ (-6) = -2$ .
- 5p 2. Demonstrați că  $x \circ y = (x + 8)(y + 8) - 8$ , pentru orice numere reale  $x$  și  $y$ .
- 5p 3. Arătați că  $e = -7$  este elementul neutru al legii de compoziție „ $\circ$ ”.
- 5p 4. Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația  $x \circ (x + 2) \leq -8$ .
- 5p 5. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $2^x \circ (-7) = 16$ .
- 5p 6. Determinați numărul real  $a$  pentru care  $2(a \circ 1) = a + (a \circ 2)$ .

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

Se consideră matricele  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  și  $M(x) = I_2 + xA$ , unde  $x$  este număr real.

- 5p 1. Arătați că  $\det A = -6$ .
- 5p 2. Demonstrați că  $M(x) = \begin{pmatrix} 1 & 3x \\ 2x & x+1 \end{pmatrix}$ , pentru orice număr real  $x$ .
- 5p 3. Arătați că suma elementelor matricei  $B$  este pătratul unui număr natural, unde  $B = (-1) \cdot M(-1) \cdot M(1)$ .
- 5p 4. Determinați numerele reale  $x$  pentru care  $\det(M(x)) = 0$ .
- 5p 5. Arătați că matricea  $C$  este inversabilă, unde  $C = M(1) - M(2) + M(3) - M(4)$ .
- 5p 6. Determinați perechile  $(a, b)$  de numere naturale pentru care  $aM(b) + bM(a) = I_2$ .

**Examenul național de bacalaureat 2023**  
**Proba E. c)**  
**Matematică *M\_pedagogic***

**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

**Model**

**Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățător-educatoare**

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

1.	$\left(\frac{2}{5}\right)^{-1} = \frac{5}{2}, 2\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$	3p
	$\left(\frac{2}{5}\right)^{-1} + 2\frac{1}{2} = \frac{5}{2} + \frac{5}{2} = 5$	2p
2.	$f(a) = a + 1, f(1) = 2, f(5) = 6$	3p
	$a + 1 = \frac{2 + 6}{2}$ , de unde obținem $a = 3$	2p
3.	$2\sqrt{x-1} = 2$ , de unde obținem $x - 1 = 1$	3p
	$x = 2$ , care convine	2p
4.	Mulțimea $M$ are 2022 de elemente, deci sunt 2022 de cazuri posibile	2p
	Multiplii de 2 din $M$ sunt $2 \cdot 1, 2 \cdot 2, 2 \cdot 3, \dots, 2 \cdot 1011$ , deci sunt 1011 cazuri favorabile	3p
	$p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{1}{2}$	
5.	$BC = 3, AC = 4, AB = 5$	3p
	$BC^2 + AC^2 = AB^2$ , deci triunghiul $ABC$ este dreptunghic în $C$	2p
6.	$\frac{10}{\sin A} = 2 \cdot 5$	3p
	$\sin A = 1$	2p

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

1.	$(-5) \circ (-6) = (-5) \cdot (-6) + 8(-5 - 6) + 56 =$	3p
	$= 30 - 88 + 56 = -2$	2p
2.	$x \circ y = xy + 8x + 8y + 64 - 8 =$	3p
	$= x(y + 8) + 8(y + 8) - 8 = (x + 8)(y + 8) - 8$ , pentru orice numere reale $x$ și $y$	2p
3.	$x \circ (-7) = (x + 8)(-7 + 8) - 8 = x + 8 - 8 = x$ , pentru orice număr real $x$	2p
	$(-7) \circ x = (-7 + 8)(x + 8) - 8 = x + 8 - 8 = x$ , pentru orice număr real $x$ , deci $e = -7$ este elementul neutru al legii de compoziție „ $\circ$ ”	3p
4.	$x \circ (x + 2) = (x + 8)(x + 10) - 8$	2p
	$(x + 8)(x + 10) - 8 \leq -8 \Leftrightarrow (x + 8)(x + 10) \leq 0$ , de unde obținem $x \in [-10, -8]$	3p
5.	$2^x \circ (-7) = 2^x$	3p
	$2^x = 2^4$ , de unde obținem $x = 4$	2p
6.	$a \circ 1 = 9a + 64, a \circ 2 = 10a + 72$	3p
	$18a + 128 = 11a + 72$ , de unde obținem $a = -8$	2p

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

1.	$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot 1 - 2 \cdot 3 =$ $= 0 - 6 = -6$	3p 2p
2.	$M(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3x \\ 2x & x \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} 1 & 3x \\ 2x & x+1 \end{pmatrix}, \text{ pentru orice număr real } x$	3p 2p
3.	$M(-1) \cdot M(1) = \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}, B = (-1) \cdot M(-1) \cdot M(1) = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ $5 + 3 + 2 + 6 = 16, \text{ care este pătratul numărului natural } 4$	3p 2p
4.	$\det(M(x)) = x + 1 - 6x^2$ $6x^2 - x - 1 = 0, \text{ deci } x = -\frac{1}{3} \text{ sau } x = \frac{1}{2}$	2p 3p
5.	$C = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$ $\det C = -24 \neq 0, \text{ deci matricea } C \text{ este inversabilă}$	3p 2p
6.	$aM(b) + bM(a) = \begin{pmatrix} a & 3ab \\ 2ab & ab+a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & 3ab \\ 2ab & ab+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & 6ab \\ 4ab & 2ab+a+b \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} a+b & 6ab \\ 4ab & 2ab+a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ de unde obținem perechile de numere naturale } (0,1) \text{ și } (1,0)$	2p 3p