Variantă de test corespunzătoare probei de matematică
Bacalaureat, profil tehnologic

- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 2 ore.**

SUBIECTUL I

Scrieți rezolvările complete. **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați numărul real *x* știind că numerele 4, 36 și *x* sunt în progresie geometrică.

5p **2.** Se consideră funcția $f: R \to R, f(x) = x + a$, unde *a* este un număr real. Determinați numărul real *a* știindă că $(f \circ f)(x) = x$ pentru orice număr real *x*.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{-x+2} = \sqrt{3}$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să nu conțină cifra 6.

5p **5.** În reperul cartezian *xOy* se consideră punctul *A(2, -3)* și dreapta *d: 2x + y - 5 = 0*. Deterrminați ecuația dreptei ce trece prin punctul *A* și este perpendiculară pe dreapta *d*.

5p **6.** Calculați *sin2x,* știind că $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și $\cos x = \frac{3\sqrt{5}}{7}$.

SUBIECTUL al II-lea

Scrieți rezolvările complete. **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 2 & x \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, unde x este număr real

5p **a)** Arătați că $\det(A(3)) = 3$.

5p **b)** Demonstrați că $A(-1015) + A(1015) = 2A(0)$.

5p **c)** Determinați numerele reale *x* pentru care $\det(A(x)) = x^2$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3 - 1}$, oricare ar fi x și y numere reale.

5p **a)** Arătați că $1 * 4 = 4$.

5p **b)** Verificați că e = 1 este element neutru al legii "*".

5p **c)** Arătați că numerele $x = (2 * 2)^3$, $y = (2 * 2 * 2)^3$ și $z = (2 * 2 * 2 * 2)^3$ sunt termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice.

SUBIECTUL al III-lea

Scrieți rezolvările complete. **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \to R, f(x) = 3\sqrt{x} - 2\ln x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x) = \frac{3\sqrt{x} - 4}{2x}$, oricare ar x număr real strict pozitiv.

5p **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{f(x)}{\sqrt{x}}-2\right)=0$.

5p **c)** Să se arate că $f(x)\geq 4-4\ln\dfrac{4}{3}, \forall x\in(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:R\to R, f(x)=(x+1)^3-3x^2-1$

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 f(x)dx=\dfrac{7}{4}$

5p **b)** Arătați că $\int_0^1 \left(3x^2+3\right)\cdot f^{2009}(x)dx=\dfrac{2^{4019}}{1005}$.

5p **c)** Să se determine numărul real *a* > *1* astfel încât $\int_1^a (f(x)-x^3)\cdot e^x dx = 5e^a$.

BAREM DE EVALUARE ȘI DE CORECTARE

• Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
• Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
• Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$36^2 = 4x$ $x = 324$	2p 3p
2.	(x + a) + a = x, pentru orice x număr real a = 0	3p 2p
3.	$-x+2=\dfrac{1}{2}$ $x=\dfrac{3}{2}$	3p 2p
4.	Nr. cazurilor posibile = 90 de numere naturale de două cifre 90 - 28 = 72 de numere naturale care nu conțin cifra 6 ⇒ nr. cazurilor favorabile = 72 $P=\dfrac{nr.caz.fav.}{nr.caz.pos.}=\dfrac{72}{90}=\dfrac{4}{5}$	3p 2p
5.	$m_d=-2$ și $m_h\cdot m_d=-1 \Rightarrow m_h=\dfrac{1}{2}$, unde *h* este dreapta care conține punctul A și este perpendiculară pe dreapta *d* *h: x - 2y - 8 = 0*	2p 3p

6.	$\sin^2 x+\cos^2 x=1 \Rightarrow \sin x=\frac{2}{7}$ $\sin 2x=2\cdot\sin x\cdot\cos x=\frac{12\sqrt{5}}{49}$	2p 3p

SUBIECTUL II **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A(3))=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 3\end{vmatrix}=2\cdot 3-1\cdot 3=$ $=3$	3p 2p
b)	$A(-1015)=\begin{pmatrix}2 & -1015\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, $A(1015)=\begin{pmatrix}2 & 1015\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ $A(-1015)+A(1015)=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 2 & 6\end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 3\end{pmatrix}=2\cdot A(0)$	2p 3p
c)	$\det(A(x))=\begin{vmatrix}2 & x\\ 1 & 3\end{vmatrix}=6-x$ $x^2-x+6=0 \Rightarrow x_1=-3 \;\; si \;\; x_2=2$	2p 3p
2.a)	$1*4=\sqrt[3]{1^3+4^3-1}=$ $=\sqrt[3]{4^3}=4$	2p 3p
b)	$x*1=\sqrt[3]{x^3+1^3-1}=\sqrt[3]{x^3}=x$ $1*x=\sqrt[3]{1^3+x^3-1}=\sqrt[3]{x^3}=x$, pentru orice x număr real Se obține $x*1=1*x=x$, pentru orice x număr real $\Rightarrow$ e = 1 este element neutru	3p 2p
c)	$x=(2*2)^3=\left(\sqrt[3]{2^3+2^3-1}\right)^3=15$, $y=(2*2*2)^3=\left(\sqrt[3]{\left(\sqrt[3]{2^3+2^3-1}\right)^3+2^3-1}\right)^3=22$ și $z=(2*2*2*2)^3=\left(\sqrt[3]{\left(\sqrt[3]{2^3+2^3-1}\right)^3+\left(\sqrt[3]{2^3+2^3-1}\right)^3-1}\right)^3=29$ Cum, $x+z=15+29=44=2\cdot 22=2y \Rightarrow$ numerele x,y,z sunt termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice.	3p 2p

SUBIECTUL III **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{3}{2\sqrt{x}}-\frac{2}{x}=$ $=\frac{3\sqrt{x}-4}{2x}$	3p 2p

b)	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{\sqrt{x}}-2\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3\sqrt{x}-2\ln x}{\sqrt{x}}-2\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2\ln x}{\sqrt{x}}\right)^{x}\overset{(1^\infty)}{=}$ $=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2\ln x}{\sqrt{x}}\right)^{-\frac{\sqrt{x}}{2\ln x}\cdot\frac{-2\ln x}{\sqrt{x}}\cdot x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(-2x\sqrt{x}\ln x\right)}=e^{-\infty}=0$	2p 3p
c)	Din $f^{'}(x)=0\Rightarrow 3\sqrt{x}-4=0\Rightarrow x=\frac{16}{9}$. Pentru $x\in\left(0,\frac{16}{9}\right]$, $f^{'}(x)\le 0\Rightarrow$ funcția f este descrescătoare și pentru $x\in\left[\frac{16}{9},+\infty\right)$, $f^{'}(x)\ge 0\Rightarrow$ funcția f este crescătoare. Deci punctul $x_0=\frac{16}{9}$ este punct de minim $\Rightarrow$ $f(x)\ge f\left(\frac{16}{9}\right)\Rightarrow f(x)\ge 4-4\ln\frac{4}{3}$	3p 2p
2.a)	$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(x^3+3x)dx=$ $=\left(\frac{x^4}{4}+\frac{3x^2}{2}\right)=\frac{1}{4}+\frac{3}{2}-0=\frac{7}{4}$	2p 3p
b)	Not. *$t=f(x)\Rightarrow dt=(3x^2+3)dx$. Pentru $x=0\Rightarrow t=0$ și pentru $x=1\Rightarrow t=4$* $\int_0^1\left(3x^2+3\right)\cdot f^{2009}(x)dx=\int_0^4 t^{2009}dt=$ $=\left.\frac{t^{2010}}{2010}\right\|_0^4=\frac{4^{2010}}{2010}=\frac{2^{4019}}{1005}$	3p 2p
c)	$\int_1^a(f(x)-x^3)\cdot e^x dx=\int_1^a 3x\cdot e^x dx=3\left(xe^x-e^x\right)\Big\|_1^a=3ae^a-e^a$ $3ae^a-e^a=5e^a\Rightarrow 3a=6\Rightarrow a=2$, unde a > 1.	3p 2p