

Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)
Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Arătați că $2i(3-i) - 6i = 2$, unde $i^2 = -1$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - mx$, unde m este număr real. Determinați numărul real m pentru care $f(-1) = f(1)$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $27^{x-1} = 9^x$.
- 5p** 4. Determinați probabilitatea ca, alegând un element din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifrele mai mici sau egale cu 3.
- 5p** 5. În sistemul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,2)$ și $B(1,-1)$. Determinați coordonatele punctului C pentru care $\overline{AC} = 2\overline{BC}$.
- 5p** 6. Se consideră expresia $E(x) = \sin 2x - 2 \operatorname{tg} x \cdot \sin \frac{2x}{3}$, unde $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Arătați că $E\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A(x) = \begin{pmatrix} x & 1-x & 1 \\ 1-x & x & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(0)) = 2$.
- 5p** b) Arătați că $A(1) \cdot A(x) - A(x-1) = 2I_3$, pentru orice număr real x .
- 5p** c) Determinați numărul real x pentru care $A(1) \cdot A(1) \cdot A(x) = 3A(1) + 2I_3$.
2. Pe mulțimea $M = [0, +\infty)$ se definește legea de compoziție $x * y = \frac{xy(x+y)}{xy+1}$.
- 5p** a) Arătați că $1 * 3 = 3$.
- 5p** b) Arătați că $e = 1$ este elementul neutru al legii de compoziție „*”.
- 5p** c) Determinați perechile (m, n) de numere naturale nenule, cu $m \leq n$, pentru care $\frac{1}{m} * \frac{1}{n} = \frac{1}{16} \cdot (m * n)$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{e^x}$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{(x-1)(4-x)}{e^x}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Arătați că axa Ox este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p** c) Demonstrați că ecuația $f(x) = n$ are soluție unică, pentru orice număr natural nenul n .
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x\sqrt{x^2 + 4}$.
- 5p** a) Arătați că $\int_0^2 \frac{f(x)}{\sqrt{x^2 + 4}} dx = 2$.

5p b) Arătați că $\int_0^{\sqrt{5}} f(x) dx = \frac{19}{3}$.

5p c) Pentru fiecare număr natural $n, n \geq 2$, se consideră numărul $I_n = \int_1^2 \frac{x^n}{f^2(x)} dx$. Determinați numărul natural $n, n \geq 2$, pentru care $I_{n+2} + 4I_n = \frac{3}{n-1}$.

Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)
Matematică $M_{\text{mate-info}}$
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$2i(3-i) - 6i = 6i - 2i^2 - 6i =$ $= -2 \cdot (-1) = 2$	3p 2p
2.	$f(-1) = 1 + m, f(1) = 1 - m$, unde m este număr real $1 + m = 1 - m$, de unde obținem $m = 0$	2p 3p
3.	$3^{3x-3} = 3^{2x}$, de unde obținem $3x - 3 = 2x$ $x = 3$	3p 2p
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt $3 \cdot 4 = 12$ numere cu cifrele mai mici sau egale cu 3, deci sunt 12 cazuri favorabile, de unde obținem $p = \frac{12}{90} = \frac{2}{15}$	2p 3p
5.	B este mijlocul segmentului AC $\frac{x_C + 3}{2} = 1$ și $\frac{y_C + 2}{2} = -1$, de unde obținem $x_C = -1$ și $y_C = -4$	3p 2p
6.	$\sin \frac{\pi}{2} = 1, \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1, \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ $E\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 1 - 1 = 0$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(0)) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$ $= 0 + 1 + 1 - 0 - 0 - 0 = 2$	2p 3p
b)	$A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A(1) \cdot A(x) = \begin{pmatrix} x+1 & 2-x & 1 \\ 2-x & x+1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, pentru orice număr real x $A(x-1) = \begin{pmatrix} x-1 & 2-x & 1 \\ 2-x & x-1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A(1) \cdot A(x) - A(x-1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_3$, pentru orice număr real x	3p 2p
c)	$A(1) \cdot A(1) \cdot A(x) = A(1) \cdot (A(1) \cdot A(x)) = A(1) \cdot (A(x-1) + 2I_3) = A(x-2) + 2I_3 + 2A(1)$, pentru orice număr real x $A(x-2) + 2I_3 + 2A(1) = 3A(1) + 2I_3 \Rightarrow A(x-2) = A(1)$, de unde obținem $x-2 = 1$, deci $x = 3$	3p 2p

2.a)	$1 * 3 = \frac{1 \cdot 3(1+3)}{1 \cdot 3 + 1} =$	3p
	$= \frac{3 \cdot 4}{4} = 3$	2p
b)	$x * 1 = \frac{x \cdot 1 \cdot (x+1)}{x \cdot 1 + 1} = \frac{x(x+1)}{x+1} = x$, pentru orice $x \in M$	2p
	$1 * x = \frac{1 \cdot x \cdot (1+x)}{1 \cdot x + 1} = \frac{x(x+1)}{x+1} = x$, pentru orice $x \in M$, deci $e = 1$ este elementul neutru al legii de compoziție „*”	3p
c)	$\frac{1}{m} * \frac{1}{n} = \frac{m+n}{mn(mn+1)}$; $\frac{1}{16} \cdot (m * n) = \frac{1}{16} \cdot \frac{mn(m+n)}{mn+1}$, pentru orice numere naturale nenule m și n	3p
	$m^2 n^2 = 16$ și, cum m și n sunt numere naturale nenule, cu $m \leq n$, obținem perechile $(1,4)$ și $(2,2)$	2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{(2x-3)e^x - (x^2-3x+1)e^x}{(e^x)^2} =$	3p
	$= \frac{-x^2+5x-4}{e^x} = \frac{(x-1)(4-x)}{e^x}$, $x \in \mathbb{R}$	2p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-3x+1}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-3}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = 0$	3p
	Dreapta de ecuație $y = 0$, adică axa Ox , este asimptota orizontală spre $+\infty$ la graficul lui f	2p
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ sau $x = 4$; pentru orice $x \in (-\infty, 1)$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(-\infty, 1)$, pentru orice $x \in (1, 4)$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $(1, 4)$ și pentru orice $x \in (4, +\infty)$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(4, +\infty)$	3p
	Cum $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $f(4) = \frac{5}{e^4} < 1$ și funcția f este continuă, obținem că ecuația $f(x) = n$ are soluție unică, pentru orice număr natural nenul n	2p
2.a)	$\int_0^2 \frac{f(x)}{\sqrt{x^2+4}} dx = \int_0^2 x dx = \frac{x^2}{2} \Big _0^2 =$	3p
	$= \frac{4}{2} - 0 = 2$	2p
b)	$\int_0^{\sqrt{5}} f(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{5}} (x^2+4) \sqrt{x^2+4} dx = \frac{1}{3} (x^2+4) \sqrt{x^2+4} \Big _0^{\sqrt{5}} =$	3p
	$= \frac{1}{3} (27-8) = \frac{19}{3}$	2p
c)	$I_n = \int_1^2 \frac{x^n}{x^2(x^2+4)} dx = \int_1^2 \frac{x^{n-2}}{x^2+4} dx$, pentru orice număr natural n , $n \geq 2$	2p
	$I_{n+2} + 4I_n = \int_1^2 \frac{x^{n-2}(x^2+4)}{x^2+4} dx = \frac{x^{n-1}}{n-1} \Big _1^2 = \frac{2^{n-1}-1}{n-1}$, deci $\frac{2^{n-1}-1}{n-1} = \frac{3}{n-1}$, de unde obținem $2^{n-1} = 4$, deci $n = 3$, care convine	3p