

Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Arătați că media aritmetică a numerelor $a = 20 - \sqrt{21}$ și $b = 22 + \sqrt{21}$ este egală cu 21.
- 5p** 2. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - 1$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 3 - x$. Arătați că $f(a) + g(a) = 2$, pentru orice număr real a .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{7x - 6} = x$.
- 5p** 4. Determinați câte numere naturale pare, de două cifre, au cifrele elemente ale mulțimii $\{1, 2, 3, 4\}$.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(6, 0)$ și $B(6, 6)$. Arătați că triunghiul AOM este isoscel, unde punctul M este mijlocul segmentului OB .
- 5p** 6. Se consideră triunghiul ABC , dreptunghic în A , astfel încât $AC = 4$ și măsura unghiului B este egală cu 60° . Arătați că înălțimea din vârful A a triunghiului ABC are lungimea egală cu 2.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & -x \\ x & x+1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(1)) = 3$.
- 5p** b) Arătați că $A(-1) \cdot A(2) - A(-1) = 2I_2$.
- 5p** c) Determinați numerele reale x pentru care $A(x) \cdot A(-x) + xA(x) = 3I_2$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = 4(xy + 1) - 3(x + y)$.
- 5p** a) Arătați că $1 \circ 2 = 3$.
- 5p** b) Arătați că, dacă $a \circ 3 = 4$, atunci $a \circ (-a) = 0$.
- 5p** c) Determinați valorile reale ale lui x pentru care $(x \circ 1) \circ (x - 1) \leq 4$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 + x + 3 - 5 \ln x$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{(x-1)(4x+5)}{x}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p** b) Arătați că $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + 5 \ln x}{3 - x - x^2} = -2$.
- 5p** c) Demonstrați că $2x^2 + x \geq 3 + 5 \ln x$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (3 - 2x)e^x$.
- 5p** a) Arătați că $\int_0^1 \frac{f(x)}{e^x} dx = 2$.
- 5p** b) Arătați că $\int_0^2 f(x) dx = e^2 - 5$.
- 5p** c) Determinați $a \in (-\infty, 1)$ pentru care $\int_a^1 \frac{e^{3x}}{f^3(x)} dx = \frac{2}{9}$.

Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$m_a = \frac{a+b}{2} = \frac{20 - \sqrt{21} + 22 + \sqrt{21}}{2} =$ $= \frac{42}{2} = 21$	3p 2p
2.	$f(a) = a - 1$, pentru orice număr real a $g(a) = 3 - a \Rightarrow f(a) + g(a) = a - 1 + 3 - a = 2$, pentru orice număr real a	2p 3p
3.	$7x - 6 = x^2 \Rightarrow x^2 - 7x + 6 = 0$ $x = 1$ sau $x = 6$, care convin	2p 3p
4.	Cifra unităților se poate alege în 2 moduri Pentru fiecare alegere a cifrei unităților, cifra zecilor se poate alege în câte 4 moduri, deci se pot forma $2 \cdot 4 = 8$ numere	2p 3p
5.	$M(3,3)$ $OM = 3\sqrt{2}$, $AM = 3\sqrt{2}$, de unde obținem că triunghiul AOM este isoscel	2p 3p
6.	Măsura unghiului ACB este egală cu 30° Dacă AD este înălțimea din vârful A a triunghiului ABC , atunci triunghiul ACD este dreptunghic, cu unghiul ACD de 30° , de unde obținem $AD = \frac{AC}{2} = 2$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1)) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - (-1) \cdot 1 =$ $= 2 + 1 = 3$	3p 2p
b)	$A(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $A(2) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A(-1) \cdot A(2) - A(-1) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_2$	3p 2p
c)	$A(x) \cdot A(-x) + xA(x) = \begin{pmatrix} 1+x^2 & x^2 \\ -x^2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & -x^2 \\ x^2 & x^2+x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+x+x^2 & 0 \\ 0 & 1+x+x^2 \end{pmatrix} = (x^2+x+1)I_2$, pentru orice număr real x $(x^2+x+1)I_2 = 3I_2$, de unde obținem $x^2+x-2=0$, deci $x=-2$ sau $x=1$	3p 2p
2.a)	$1 \circ 2 = 4(1 \cdot 2 + 1) - 3(1 + 2) =$ $= 12 - 9 = 3$	3p 2p
b)	$a \circ 3 = 9a - 5$, deci $9a - 5 = 4$, de unde obținem $a = 1$ $a \circ (-a) = 1 \circ (-1) = 4(-1+1) - 3(1-1) = 0$	3p 2p

c)	$x \circ 1 = x + 1, (x \circ 1) \circ (x - 1) = 4x^2 - 6x$, pentru orice număr real x	3p
	$4x^2 - 6x \leq 4$, de unde obținem $x \in \left[-\frac{1}{2}, 2\right]$	2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = 4x + 1 - \frac{5}{x} =$	3p
	$= \frac{4x^2 + x - 5}{x} = \frac{(x-1)(4x+5)}{x}, x \in (0, +\infty)$	2p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + 5 \ln x}{3 - x - x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + x + 3}{3 - x - x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(2 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}\right)}{x^2 \left(\frac{3}{x^2} - \frac{1}{x} - 1\right)} =$	3p
	$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}}{\frac{3}{x^2} - \frac{1}{x} - 1} = -2$	2p
c)	$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1; f'(x) \leq 0$, pentru orice $x \in (0, 1] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(0, 1]$ și $f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [1, +\infty) \Rightarrow f$ este crescătoare pe $[1, +\infty)$, deci $f(x) \geq f(1)$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$	3p
	$f(1) = 6$, deci $2x^2 + x + 3 - 5 \ln x \geq 6$, de unde obținem $2x^2 + x \geq 3 + 5 \ln x$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$	2p
2.a)	$\int_0^1 \frac{f(x)}{e^x} dx = \int_0^1 (3 - 2x) dx = \left(3x - 2 \cdot \frac{x^2}{2}\right) \Big _0^1 =$	3p
	$= 3 - 1 = 2$	2p
b)	$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 (3 - 2x) e^x dx = (3 - 2x) e^x \Big _0^2 + 2e^x \Big _0^2 =$	3p
	$= -e^2 - 3 + 2e^2 - 2 = e^2 - 5$	2p
c)	$\int_a^1 \frac{e^{3x}}{f^3(x)} dx = \int_a^1 \frac{1}{(3 - 2x)^3} dx = -\frac{1}{2} \int_a^1 \frac{(3 - 2x)'}{(3 - 2x)^3} dx = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(3 - 2x)^2} \Big _a^1 = \frac{1}{4} \cdot \left(1 - \frac{1}{(3 - 2a)^2}\right)$, pentru orice $a \in (-\infty, 1)$	3p
	$\frac{1}{4} \cdot \left(1 - \frac{1}{(3 - 2a)^2}\right) = \frac{2}{9}$ și, cum $a \in (-\infty, 1)$, obținem $a = 0$	2p