Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

Varianta 7

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că $1+6\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=6$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-2$. Arătați că $f(3)-f(2)=1$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{3x+1}=2$.

5p **4.** Determinați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, numărul $10-n$ să fie par.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(a,0)$ și $B(a,6)$, unde a este număr real. Arătați că $AB=6$, pentru orice număr real a.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC dreptunghic în A, cu $AB=5$ și $AC=2AB$. Arătați că aria triunghiului ABC este egală cu 25.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}7 & 3\\ 3 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătați că $\det A=-2$.

5p **b)** Arătați că $A-4I_2=3B$.

5p **c)** Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $X+X\cdot B=A$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=xy(x+y-4)$.

5p **a)** Arătați că $2*3=6$.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $1*x=4$.

5p **c)** Determinați numărul real x pentru care $2^x*2^x=2^{3x}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-9x^2+3$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=3x(x-6)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați intervalele de monotonie a funcției f.

5p **c)** Arătați că $\lim\limits_{x\to1}\frac{f'(x)-f'(1)}{3f(x)-xf'(x)}=\frac{2}{3}$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-1)e^x$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^2\frac{f(x)}{e^x}dx=0$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^1 f(x)dx=2-e$.

5p **c)** Determinați numărul natural n, $n>2$, pentru care $\int_2^n\frac{x}{f(x)\cdot f(-x)}dx=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{8}$.

Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 7

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$1+6\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=1+6\cdot\frac{5}{6}=$	**3p**
	$=1+5=6$	**2p**
2.	$f(3)=1$	**2p**
	$f(2)=0$, de unde obținem $f(3)-f(2)=1-0=1$	**3p**
3.	$3x+1=4$	**3p**
	$x=1$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea A are 9 elemente, deci sunt 9 cazuri posibile	**2p**
	Numerele n din mulțimea A pentru care numărul $10-n$ este par sunt 2, 4, 6 și 8, de unde obținem 4 cazuri favorabile, deci $p=\frac{4}{9}$	**3p**
5.	Pentru orice număr real a, $AB=\sqrt{(a-a)^2+(6-0)^2}=$	**3p**
	$=\sqrt{6^2}=6$	**2p**
6.	$AC=10$	**2p**
	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{AB\cdot AC}{2}=\frac{5\cdot 10}{2}=25$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}7 & 3\\ 3 & 1\end{vmatrix}=7\cdot 1-3\cdot 3=$	**3p**
	$=7-9=-2$	**2p**
b)	$A-4I_2=\begin{pmatrix}7 & 3\\ 3 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 3\\ 3 & -3\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=3\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=3B$	**2p**
c)	$X\cdot(I_2+B)=A$ și, cum $I_2+B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ și $\det(I_2+B)\neq 0$, obținem $X=A\cdot(I_2+B)^{-1}$	**2p**
	$(I_2+B)^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}$, de unde obținem $X=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$	**3p**
2.a)	$2*3=2\cdot 3(2+3-4)=$	**3p**
	$=6\cdot 1=6$	**2p**

b)	$1 * x = x^2 - 3x$, pentru orice număr real x $x^2 - 3x - 4 = 0$, de unde obținem $x = -1$ sau $x = 4$	**2p** **3p**
c)	$2^x * 2^x = 2^{2x}\left(2^x + 2^x - 4\right)$, pentru orice număr real x $2^{2x}\left(2^x + 2^x - 4\right) = 2^{3x} \Leftrightarrow 2^x + 2^x - 4 = 2^x \Leftrightarrow 2^x = 4$, de unde obținem $x = 2$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = 3x^2 - 9 \cdot 2x =$ $= 3x^2 - 18x = 3x(x-6)$, $x \in \mathbb{R}$	**3p** **2p**
b)	$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ sau $x = 6$ Pentru orice $x \in (-\infty, 0]$, $f'(x) \geq 0 \Rightarrow f$ este crescătoare pe $(-\infty, 0]$, pentru orice $x \in [0,6]$, $f'(x) \leq 0 \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[0,6]$ și pentru orice $x \in [6,+\infty)$, $f'(x) \geq 0 \Rightarrow f$ este crescătoare pe $[6,+\infty)$	**2p** **3p**
c)	$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f'(x) - f'(1)}{3f(x) - x f'(x)} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3\left(x^2 - 6x + 5\right)}{9\left(1 - x^2\right)} =$ $= \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3(x-1)(x-5)}{-9(x-1)(x+1)} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-5}{-3(x+1)} = \dfrac{2}{3}$	**2p** **3p**
2.a)	$\displaystyle\int_0^2 \frac{f(x)}{e^x}\,dx = \int_0^2 (x-1)\,dx = \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\Bigg\vert_0^2 =$ $= 2 - 2 = 0$	**3p** **2p**
b)	$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (x-1)e^x\,dx = (x-1)e^x \Big\vert_0^1 - e^x \Big\vert_0^1 =$ $= 1 - (e-1) = 2 - e$	**3p** **2p**
c)	$\displaystyle\int_2^n \frac{x}{f(x) \cdot f(-x)}\,dx = \int_2^n \frac{x}{1 - x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int_2^n \frac{\left(x^2 - 1\right)'}{x^2 - 1}\,dx = -\frac{1}{2}\ln\left\vert x^2 - 1\right\vert \Bigg\vert_2^n = \frac{1}{2}\ln\frac{3}{n^2 - 1}$ $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{n^2 - 1} = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{8}$ și, cum n este număr natural, $n > 2$, obținem $n = 3$	**3p** **2p**