

1. Un pătrat și un romb au același perimetru. Dacă aria pătratului este 16, iar unul dintre unghiurile rombului are 30° , atunci suma pătratelor diagonalelor rombului este: **(9 pct.)**
a) 10; b) 32; c) 16; d) 40; e) 36; f) 64.
2. Valoarea numărului $P = \sin 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 30^\circ \cdot \cos 90^\circ$ este **(9 pct.)**
a) 1; b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; d) $\frac{1}{2}$; e) 0; f) $\frac{\sqrt{3}}{4}$.
3. În triunghiul ABC se cunosc $AB = 2$, $BC = \sqrt{7}$ și $m(\hat{A}) = \frac{\pi}{3}$. Lungimea laturii AC este: **(9 pct.)**
a) $\sqrt{7}$; b) 4; c) 2; d) 7; e) $\sqrt{3}$; f) 3.
4. Într-un triunghi ABC în care $AB = 6$ are loc relația $2(\cos A + \cos B) = 3 + 2 \cos(A + B)$. Atunci aria triunghiului este: **(9 pct.)**
a) $6\sqrt{3}$; b) 18; c) $9\sqrt{3}$; d) $3\sqrt{3}$; e) 12; f) 36.
5. Fie $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Dacă $\sin x = \frac{3}{5}$, atunci $\cos x$ este: **(9 pct.)**
a) 1; b) $\frac{3}{5}$; c) $\frac{4}{5}$; d) $\frac{\sqrt{3}}{5}$; e) $-\frac{3}{5}$; f) 0.
6. Valoarea parametrului $m \in \mathbb{R}$ pentru care vectorii $\vec{u} = m\vec{i} + \vec{j}$ și $\vec{v} = -\vec{i} + 3\vec{j}$ sunt ortogonali, este: **(9 pct.)**
a) -3; b) 1; c) -1; d) 3; e) $\frac{1}{3}$; f) 0.
7. Centrul de greutate al triunghiului ABC de vârfuri $A(0, 3)$, $B(-1, 0)$ și $C(1, 0)$ este: **(9 pct.)**
a) $G(0, -1)$; b) $G(0, 1)$; c) $G(1, 1)$; d) $G(-1, 0)$; e) $G(2, 0)$; f) $G(0, 0)$.
8. Se consideră dreptele de ecuații $d_1 : mx + y = 2$ și $d_2 : x + 2y = -2$. Valoarea parametrului real m pentru care dreptele sunt paralele, este: **(9 pct.)**
a) -1; b) 2; c) $\frac{1}{2}$; d) $-\frac{1}{2}$; e) 1; f) 0.
9. Se consideră vectorii $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j}$ și $\vec{w} = 2\vec{i} + \vec{j}$. Atunci vectorul sumă $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$ este: **(9 pct.)**
a) \vec{j} ; b) \vec{i} ; c) $-2\vec{j}$; d) $2\vec{i} + \vec{j}$; e) $4\vec{i} + \vec{j}$; f) $4\vec{i} - \vec{j}$.
10. În planul xOy se consideră paralelogramul $ABCD$. Fie M punctul de intersecție al diagonalelor și P mijlocul segmentului $[CD]$. Dacă $\vec{AB} = \vec{i} + \vec{j}$ și $\vec{AM} = 2\vec{i} - \vec{j}$, atunci vectorul \vec{AP} este: **(9 pct.)**
a) $\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$; b) $-\vec{i} + \vec{j}$; c) $\frac{1}{2}\vec{i} - \frac{5}{2}\vec{j}$; d) $2\vec{i} + \vec{j}$; e) $\frac{7}{2}\vec{i} - \frac{5}{2}\vec{j}$; f) $\frac{7}{2}\vec{i} + \vec{j}$.

¹Subiecte date la Admiterea UPB/Sesiunea iulie 2022 la facultățile: ETTI, AC, FILS.

1. Un pătrat și un romb au același perimetru. Dacă aria pătratului este 16, iar unul dintre unghiurile rombului are 30° , atunci suma pătratelor diagonalelor rombului este: **(7 pct.)**
a) 10; b) 32; c) 16; d) 40; e) 36; f) 64.

Soluție. Atât pătratul, cât și rombul $ABCD$, au laturi egale. Fie ℓ latura pătratului și fie ℓ' latura rombului. Aria pătratului fiind $16 = \ell^2$, rezultă $\ell = 4$. Din egalitatea celor două perimetre, rezultă $4\ell = 4\ell'$, deci $\ell' = \ell = 4$. Fie O punctul de intersecție al diagonalelor rombului, $\{O\} = AC \cap BD$. Folosind faptul că punctul O înjumătățește diagonalele rombului și aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic AOB (unde O este unghi drept), obținem

$$AO^2 + OB^2 = AB^2 \Leftrightarrow \left(\frac{AC}{2}\right)^2 + \left(\frac{BD}{2}\right)^2 = \ell'^2 \Leftrightarrow AC^2 + BD^2 = 4 \cdot 4^2 \Leftrightarrow AC^2 + BD^2 = 64. \quad \textcircled{f}$$

Se observă că pentru aflarea răspunsului corect nu este necesară cunoașterea unghiului A .

Altfel. Ca mai sus, aflăm latura $\ell' = AB = 4$ a rombului. Ținând cont că AC este bisectoarea unghiului \hat{A} , în triunghiul dreptunghic AOB (unde O este unghi drept) avem $AO = AB \cdot \cos \frac{A}{2}$ și $BO = AB \cdot \sin \frac{A}{2}$, deci

$$\begin{aligned} AC^2 + BD^2 &= (2 \cdot AO)^2 + (2 \cdot BO)^2 = 4(AO^2 + BO^2) = 4 \left[(AB \cdot \cos \frac{A}{2})^2 + (AB \cdot \sin \frac{A}{2})^2 \right] \\ &= 4 \cdot AB^2 (\cos^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{A}{2}) = 4 \cdot AB^2 \cdot 1 = 4 \cdot 16 = 64. \end{aligned}$$

2. Valoarea numărului $P = \sin 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 30^\circ \cdot \cos 90^\circ$ este **(7 pct.)**

a) 1; b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; d) $\frac{1}{2}$; e) 0; f) $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Soluție. Prin calcul direct, obținem: $P = \sin 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 30^\circ \cdot \cos 90^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 0 = 0. \quad \textcircled{e}$

Altfel. Se observă că avem $\cos 90^\circ = 0$, deci produsul P , având un factor nul, este egal cu 0.

3. În triunghiul ABC se cunosc $AB = 2$, $BC = \sqrt{7}$ și $m(\hat{A}) = \frac{\pi}{3}$. Lungimea laturii AC este: **(7 pct.)**
a) $\sqrt{7}$; b) 4; c) 2; d) 7; e) $\sqrt{3}$; f) 3.

Soluție. Aplicând teorema cosinusului în triunghiul ABC pentru latura BC și notând $x = AC$, obținem:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos A \Leftrightarrow (\sqrt{7})^2 = 2^2 + x^2 - 2 \cdot 2 \cdot x \cdot \cos \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x \in \{-1, 3\}.$$

Dar rădăcina $x = -1 < 0$ nu convine, deci $AB = x = 3. \quad \textcircled{f}$

4. Într-un triunghi ABC în care $AB = 6$ are loc relația $2(\cos A + \cos B) = 3 + 2 \cos(A + B)$. Atunci aria triunghiului este: **(7 pct.)**
a) $6\sqrt{3}$; b) 18; c) $9\sqrt{3}$; d) $3\sqrt{3}$; e) 12; f) 36.

Soluție. Folosind egalitatea sumei unghiurilor unui triunghi, avem $A + B = \pi - C$, de unde obținem

$$\cos(A + B) = \cos(\pi - C) = -\cos C, \quad (1)$$

care permite rescrierea egalității din enunț:

$$\begin{aligned} 2(\cos A + \cos B) &= 3 + 2 \cos(A + B) \\ \Leftrightarrow 2(\cos A + \cos B) &= 3 - 2 \cos C \\ \Leftrightarrow 2(\cos A + \cos B + \cos C) &= 3 \\ \Leftrightarrow \cos A + \cos B + \cos C &= \frac{3}{2}, \end{aligned}$$

¹Subiecte date la Admiterea UPB/Sesiunea iulie 2022 la facultățile: ETTI, AC, FILS.

sub forma

$$\cos A + \cos B + \cos C = \frac{3}{2}. \quad (2)$$

Examinăm membrul stâng. Pentru început, observăm că

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}. \quad (3)$$

Pe de altă parte, din egalitatea $A + B = \pi - C$ rezultă

$$\cos \frac{A+B}{2} = \cos \frac{\pi - C}{2} = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2} \right) = \sin \left(\frac{C}{2} \right) > 0, \quad (4)$$

și deci din inegalitatea

$$\cos \frac{A-B}{2} \leq 1,$$

amplificând cu $\cos(\frac{A+B}{2})$ care este strict pozitiv în conformitate cu (4), obținem

$$\cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \leq \cos \frac{A+B}{2}.$$

Aceasta, folosind (3), conduce la inegalitatea

$$\cos A + \cos B \leq 2 \cos \frac{A+B}{2}, \quad (5)$$

cu egalitate doar în cazul când $\cos(\frac{A-B}{2}) = 1$, deci când

$$A = B \quad (6)$$

Observăm că din (5) și (4) rezultă

$$\cos A + \cos B \leq 2 \sin \left(\frac{C}{2} \right), \quad (7)$$

cu egalitate pentru (6). Adunând $\cos C$ la inegalitatea (7), obținem

$$\cos A + \cos B + \cos C \leq 2 \sin \left(\frac{C}{2} \right) + \cos C, \quad (8)$$

care se poate rescrie succesiv:

$$\begin{aligned} \cos A + \cos B + \cos C &\leq 2 \sin \left(\frac{C}{2} \right) + \cos C \\ &= 2 \sin \left(\frac{C}{2} \right) + 1 - 2 \sin^2 \left(\frac{C}{2} \right) \\ &= \frac{3}{2} + [-2 \sin^2 \left(\frac{C}{2} \right) + 2 \sin \left(\frac{C}{2} \right) - \frac{1}{2}] \\ &= \frac{3}{2} - 2[\sin^2 \left(\frac{C}{2} \right) - \sin \left(\frac{C}{2} \right) + \frac{1}{4}] \\ &= \frac{3}{2} - 2[\sin \frac{C}{2} - \frac{1}{2}]^2 \\ &\leq \frac{3}{2}, \end{aligned}$$

și deci

$$\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}, \quad (9)$$

cu egalitate doar în cazul când avem pe lângă condiția precedentă (6) și condiția recentă $\sin \frac{C}{2} = \frac{1}{2}$, această ultimă egalitate având loc pentru $\frac{C}{2} = \frac{\pi}{6}$, deci pentru

$$C = \frac{\pi}{3}. \quad (10)$$

În concluzie, are loc (9), cu egalitate pentru (6) și (10) deci (ținând cont că $A + B + C = \pi$), pentru

$$\begin{cases} A = B \\ C = \frac{\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow A = B = C = \frac{\pi}{3}.$$

Deci inegalitatea (9) devine egalitate doar în cazul triunghiului echilateral. Din ipoteza rescrisă sub forma egalității (2), observăm că inegalitatea (9) este în cazul nostru (prin ipoteză) chiar egalitate, deci că triunghiul este echilateral, deci are laturile egale $AB = BC = CA$. Folosind faptul că s-a dat latura $BC = 6$, rezultă că avem $AB = BC = CA = 6$, iar aria triunghiului echilateral este

$$A = \frac{(BC)^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{6^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}.$$

Altfel. Folosind formulele

$$\begin{aligned} \cos 2x &= 2 \cos^2 x - 1, & \text{pentru } x &= A + B, \\ \cos x + \cos y &= 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}, & \text{pentru } x &= A, y = B, \\ \cos x - \cos y &= -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}, & \text{pentru } x &= \frac{A-B}{2}, y = \frac{A+B}{2} \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \sin x, & \text{pentru } x &= \frac{C}{2}, \end{aligned}$$

egalitatea din enunț se rescrie

$$\begin{aligned} 2(\cos A + \cos B) &= 3 + 2 \cos(A + B) \\ \Leftrightarrow 2 \cdot 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} &= 3 + 2(2 \cos^2 \frac{A+B}{2} - 1) \\ \Leftrightarrow 4 \cos \frac{A+B}{2} (\cos \frac{A-B}{2} - \cos \frac{A+B}{2}) &= 1 \\ \Leftrightarrow 4 \cos \frac{\pi-C}{2} \cdot 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} &= 1 \\ \Leftrightarrow 8 \sin \frac{C}{2} \cdot 8 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} &= 1 \\ \Leftrightarrow \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} &= \frac{1}{8}. \end{aligned} \tag{11}$$

Pe de altă parte, folosind relația $\cos x = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}$ pentru $x = A$, $x = B$ și $x = C$, egalitatea din enunț se poate rescrie, alternativ,

$$\begin{aligned} 2(\cos A + \cos B) &= 3 + 2 \cos(A + B) \\ \Leftrightarrow 2(\cos A + \cos B) &= 3 + 2 \cos(A + B) \\ \Leftrightarrow 2(\cos A + \cos B) &= 3 + 2 \cos(\pi - C) \\ \Leftrightarrow 2(\cos A + \cos B + \cos C) &= 3 \\ \Leftrightarrow 2(1 - 2 \sin^2 \frac{A}{2} + 1 - 2 \sin^2 \frac{B}{2} + 1 - 2 \sin^2 \frac{C}{2}) &= 3 \\ \Leftrightarrow 4(\sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2}) &= 3 \\ \Leftrightarrow \frac{\sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2}}{3} &= \frac{1}{4}. \end{aligned} \tag{12}$$

Folosim inegalitatea mediilor $\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{x \cdot y \cdot z}$ cu $x, y, z \geq 0$, care devine egalitate doar în cazul când $x = y = z$. Pentru valorile $x = \sin^2 \frac{A}{2} > 0$, $y = \sin^2 \frac{B}{2} > 0$, $z = \sin^2 \frac{C}{2} > 0$, această inegalitate se rescrie sub forma

$$\frac{\sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2}}{3} \geq \sqrt[3]{\sin^2 \frac{A}{2} \sin^2 \frac{B}{2} \sin^2 \frac{C}{2}}. \tag{13}$$

Dar, folosind (12), membrul stâng este

$$\frac{\sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2}}{3} = \frac{1}{4},$$

iar membrul drept este egal cu

$$\sqrt[3]{\sin^2 \frac{A}{2} \sin^2 \frac{B}{2} \sin^2 \frac{C}{2}} = \sqrt[3]{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}^2 = \left(\sqrt[3]{\frac{1}{8}}\right)^2 = \frac{1}{4},$$

deci cei doi membri ai inegalității (13) sunt egali. Inegalitatea (13) fiind egalitate, rezultă că cei trei termeni ai acesteia $x = \sin^2 \frac{A}{2} > 0$, $y = \sin^2 \frac{B}{2} > 0$, $z = \sin^2 \frac{C}{2} > 0$, trebuie să fie egali (și egali cu media lor $\frac{1}{4}$), deci, cele trei sinusuri fiind strict pozitive și având $\frac{A}{2} = \frac{B}{2} = \frac{C}{2} \in (0, \frac{\pi}{2})$, obținem:

$$\begin{aligned} \sin^2 \frac{A}{2} = \sin^2 \frac{B}{2} = \sin^2 \frac{C}{2} = \frac{1}{4} &\Leftrightarrow \sin \frac{A}{2} = \sin \frac{B}{2} = \sin \frac{C}{2} = \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{A}{2} = \frac{B}{2} = \frac{C}{2} = \frac{\pi}{6} &\Leftrightarrow A = B = C = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

Rezultă că triunghiul este echilateral cu o latură $\ell = AB = 6$, deci are aria $A = \frac{\ell^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{6^2 \sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$.

5. Fie $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Dacă $\sin x = \frac{3}{5}$, atunci $\cos x$ este: **(7 pct.)**

a) 1; b) $\frac{3}{5}$; c) $\frac{4}{5}$; d) $\frac{\sqrt{3}}{5}$; e) $-\frac{3}{5}$; f) 0.

Soluție. Se observă că din condiția $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, rezultă $\cos x > 0$. Atunci, folosind această inegalitate și formula trigonometrică fundamentală $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, obținem: **(7 pct.)**

$$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}. \textcircled{c}$$

6. Valoarea parametrului $m \in \mathbb{R}$ pentru care vectorii $\vec{u} = m\vec{i} + \vec{j}$ și $\vec{v} = -\vec{i} + 3\vec{j}$ sunt ortogonali, este: **(7 pct.)**

a) -3; b) 1; c) -1; d) 3; e) $\frac{1}{3}$; f) 0.

Soluție. Ortogonalitatea vectorilor $\vec{u} = m\vec{i} + \vec{j}$ și $\vec{v} = -\vec{i} + 3\vec{j}$ revine la anularea produsului lor scalar, deci $m \cdot (-1) + 1 \cdot 3 = 0 \Leftrightarrow m = 3$. **(d)**

7. Centrul de greutate al triunghiului ABC de vârfuri $A(0, 3)$, $B(-1, 0)$ și $C(1, 0)$ este: **(7 pct.)**

a) $G(0, -1)$; b) $G(0, 1)$; c) $G(1, 1)$; d) $G(-1, 0)$; e) $G(2, 0)$; f) $G(0, 0)$.

Soluție. Coordonatele centrului de greutate sunt mediile aritmetice ale coordonatelor celor trei vârfuri: **(7 pct.)**

$$G(x_G, y_G) = \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \right) = \left(\frac{0 + (-1) + 1}{3}, \frac{3 + 0 + 0}{3} \right) = (0, 1). \textcircled{b}$$

8. Se consideră dreptele de ecuații $d_1 : mx + y = 2$ și $d_2 : x + 2y = -2$. Valoarea parametrului real m pentru care dreptele sunt paralele, este: **(7 pct.)**

a) -1; b) 2; c) $\frac{1}{2}$; d) $-\frac{1}{2}$; e) 1; f) 0.

Soluție. Dreptele au aceeași direcție doar dacă are loc proporționalitatea coeficienților variabilelor x și y din ecuațiile dreptelor:

$$\frac{m}{1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}.$$

Observăm că $\frac{m}{1} = \frac{1}{2} \neq \frac{2}{-2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq 1$, deci cele două drepte nu coincid. Prin urmare, pentru $m = \frac{1}{2}$, dreptele sunt paralele. **(c)**

9. Se consideră vectorii $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j}$ și $\vec{w} = 2\vec{i} + \vec{j}$. Atunci vectorul sumă $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$ este: **(7 pct.)**

a) \vec{j} ; b) \vec{i} ; c) $-2\vec{j}$; d) $2\vec{i} + \vec{j}$; e) $4\vec{i} + \vec{j}$; f) $4\vec{i} - \vec{j}$.

Soluție. Suma celor trei vectori se realizează sumând separat coeficienții versorilor \vec{i} și \vec{j} :

$$\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = (\vec{i} + \vec{j}) + (\vec{i} - \vec{j}) + (2\vec{i} + \vec{j}) = (1 + 1 + 2)\vec{i} + (1 + (-1) + 1)\vec{j} = 4\vec{i} + \vec{j}. \textcircled{e}$$

10. În planul xOy se consideră paralelogramul $ABCD$. Fie M punctul de intersecție al diagonalelor și P mijlocul segmentului $[CD]$. Dacă $\vec{AB} = \vec{i} + \vec{j}$ și $\vec{AM} = 2\vec{i} - \vec{j}$, atunci vectorul \vec{AP} este: **(7 pct.)**

a) $\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$; b) $-\vec{i} + \vec{j}$; c) $\frac{1}{2}\vec{i} - \frac{5}{2}\vec{j}$; d) $2\vec{i} + \vec{j}$; e) $\frac{7}{2}\vec{i} - \frac{5}{2}\vec{j}$; f) $\frac{7}{2}\vec{i} + \vec{j}$.

Soluție. Folosind regula triunghiului de adunare a vectorilor (egalitatea Chasles, $\vec{QS} = \vec{QR} + \vec{RS}$) și faptul că punctul M de intersecție a diagonalelor se află la mijlocul acestora, obținem:

$$\vec{AC} = 2 \cdot \vec{AM} = 2 \cdot (2\vec{i} - \vec{j}) = 4\vec{i} - 2\vec{j}.$$

De asemenea, avem

$$\vec{AD} = \vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB} = (4\vec{i} - 2\vec{j}) - (\vec{i} + \vec{j}) = 3\vec{i} - 3\vec{j}.$$

Atunci, deoarece P se află la mijlocul segmentului $[CD]$, obținem:

$$\vec{AP} = \frac{1}{2}(\vec{AC} + \vec{AD}) = \frac{1}{2}[(4\vec{i} - 2\vec{j}) + (3\vec{i} - 3\vec{j})] = \frac{1}{2}(7\vec{i} - 5\vec{j}) = \frac{7}{2}\vec{i} - \frac{5}{2}\vec{j}. \textcircled{e}$$

1. Suma soluțiilor ecuației $\sin(x - \frac{\pi}{6}) \cos(\frac{\pi}{6}) + \sin(\frac{\pi}{6}) \cos(x - \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$, aflate în intervalul $[0, \pi]$, este: **(9 pct.)**
a) $\frac{\pi}{6}$; b) 0; c) $\frac{3\pi}{2}$; d) $\frac{\pi}{2}$; e) $\frac{5\pi}{6}$; f) π .
2. Valoarea numărului $P = \sin 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 30^\circ \cdot \cos 90^\circ$ este **(9 pct.)**
a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; c) 1; d) $\frac{\sqrt{3}}{4}$; e) 0; f) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
3. Se consideră punctele $A(m, 3 - m)$, $B(2, 2)$ și $C(1, 1)$. Mulțimea valorilor parametrului real m pentru care triunghiul ABC este dreptunghic în A , este: **(9 pct.)**
a) $\{2, -2\}$; b) \emptyset ; c) $\{1, -1\}$; d) $\{1\}$; e) $\{2\}$; f) $\{1, 2\}$.
4. Valoarea parametrului $m \in \mathbb{R}$ pentru care vectorii $\vec{u} = m\vec{i} + \vec{j}$ și $\vec{v} = -\vec{i} + 3\vec{j}$ sunt ortogonali, este: **(9 pct.)**
a) $\frac{1}{3}$; b) -1 ; c) 3; d) 1; e) 0; f) -3 .
5. Se consideră dreptele de ecuații $d_1 : mx + y = 2$ și $d_2 : x + 2y = -2$. Valoarea parametrului real m pentru care dreptele sunt paralele, este: **(9 pct.)**
a) 1; b) 2; c) $\frac{1}{2}$; d) 0; e) $-\frac{1}{2}$; f) -1 .
6. În $\triangle ABC$ se cunosc $AB = \sqrt{2}$, $AC = 1$ și $m(\hat{A}) = 135^\circ$. Atunci lungimea laturii BC este: **(9 pct.)**
a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $\sqrt{3}$; c) $2\sqrt{5}$; d) $\sqrt{5}$; e) $\sqrt{2}$; f) $\frac{\sqrt{5}}{2}$.
7. Într-un triunghi de arie $S = \sqrt{3}$ se cunoaște raza cercului circumscris, $R = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Notând cu a, b, c lungimile celor trei laturi, valoarea produsului $a \cdot b \cdot c$ este: **(9 pct.)**
a) $4\sqrt{3}$; b) 8; c) 6; d) $\frac{1}{2}$; e) $\frac{1}{8}$; f) 2.
8. Fie $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Dacă $\sin x = \frac{3}{5}$, atunci $\cos x$ este: **(9 pct.)**
a) 0; b) $\frac{\sqrt{3}}{5}$; c) $\frac{4}{5}$; d) $\frac{3}{5}$; e) 1; f) $-\frac{3}{5}$.
9. Centrul de greutate al triunghiului ABC de vârfuri $A(0, 3)$, $B(-1, 0)$ și $C(1, 0)$ este: **(9 pct.)**
a) $G(1, 1)$; b) $G(-1, 0)$; c) $G(2, 0)$; d) $G(0, -1)$; e) $G(0, 1)$; f) $G(0, 0)$.
10. Se consideră vectorii $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j}$ și $\vec{w} = 2\vec{i} + \vec{j}$. Atunci vectorul sumă $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$ este: **(9 pct.)**
a) \vec{i} ; b) $-2\vec{j}$; c) $4\vec{i} - \vec{j}$; d) \vec{j} ; e) $4\vec{i} + \vec{j}$; f) $2\vec{i} + \vec{j}$.

1. Suma soluțiilor ecuației $\sin(x - \frac{\pi}{6}) \cos(\frac{\pi}{6}) + \sin(\frac{\pi}{6}) \cos(x - \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$, aflate în intervalul $[0, \pi]$, este: **(7 pct.)**
a) $\frac{\pi}{6}$; b) 0; c) $\frac{3\pi}{2}$; d) $\frac{\pi}{2}$; e) $\frac{5\pi}{6}$; f) π .

Soluție. Folosind formula $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$ pentru $a = x - \frac{\pi}{6}$, $b = \frac{\pi}{6}$, ecuația se rescrie

$$\begin{aligned}\sin(x - \frac{\pi}{6}) \cos(\frac{\pi}{6}) + \sin(\frac{\pi}{6}) \cos(x - \frac{\pi}{6}) &= \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow x \in \{k\pi + (-1)^k \arcsin \frac{1}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\} &\Leftrightarrow x \in \{k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{6} \mid k \in \mathbb{Z}\}.\end{aligned}$$

Folosind însă condiția din enunț, obținem două soluții acceptabile,

$$x \in \left\{ k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{6} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cap [0, \pi] = \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right\}.$$

Suma acestora este $\frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} = \pi$. **(f)**

2. Valoarea numărului $P = \sin 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 30^\circ \cdot \cos 90^\circ$ este **(7 pct.)**
a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; c) 1; d) $\frac{\sqrt{3}}{4}$; e) 0; f) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Soluție. Prin calcul direct, obținem: $P = \sin 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 30^\circ \cdot \cos 90^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 0 = 0$. **(e)**

Altfel. Se observă că avem $\cos 90^\circ = 0$, deci produsul P , având un factor nul, este egal cu 0.

3. Se consideră punctele $A(m, 3 - m)$, $B(2, 2)$ și $C(1, 1)$. Mulțimea valorilor parametrului real m pentru care triunghiul ABC este dreptunghic în A , este: **(7 pct.)**
a) $\{2, -2\}$; b) \emptyset ; c) $\{1, -1\}$; d) $\{1\}$; e) $\{2\}$; f) $\{1, 2\}$.

Soluție. Lungimile laturilor triunghiului sunt:

$$\begin{aligned}AB &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(2 - m)^2 + (-1 + m)^2} = \sqrt{2m^2 - 6m + 5}, \\ BC &= \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}, \\ CA &= \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} = \sqrt{(m - 1)^2 + (2 - m)^2} = \sqrt{2m^2 - 6m + 5}.\end{aligned}$$

Aplicând în triunghiul ABC teorema lui Pitagora (unde BC este ipotenuză), obținem

$$BC^2 = AB^2 + CA^2 \Leftrightarrow 2 = (2m^2 - 6m + 5) + (2m^2 - 6m + 5) \Leftrightarrow 4m^2 - 12m + 8 = 0 \Leftrightarrow m^2 - 3m + 2 = 0,$$

cu soluțiile $m \in \{1, 2\}$. **(f)**

Altfel. Triunghiul ABC este dreptunghic în A doar dacă dreptele AB și AC sunt perpendiculare, deci dacă pantele acestora, k_{AB} și k_{AC} satisfac egalitatea $k_{AB} \cdot k_{AC} = -1$. Dar $k_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-1 - m}{2 - m}$ și $k_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{-2 - m}{1 - m}$, deci $k_{AB} \cdot k_{AC} = -1 \Leftrightarrow 2(m^2 - 3m + 2) = 0 \Leftrightarrow m^2 - 3m + 2 \Leftrightarrow m \in \{1, 2\}$.

4. Valoarea parametrului $m \in \mathbb{R}$ pentru care vectorii $\vec{u} = m\vec{i} + \vec{j}$ și $\vec{v} = -\vec{i} + 3\vec{j}$ sunt ortogonali, este: **(7 pct.)**
a) $\frac{1}{3}$; b) -1 ; c) 3; d) 1; e) 0; f) -3 .

Soluție. Ortogonalitatea vectorilor $\vec{u} = m\vec{i} + \vec{j}$ și $\vec{v} = -\vec{i} + 3\vec{j}$ revine la anularea produsului lor scalar, deci $m \cdot (-1) + 1 \cdot 3 = 0 \Leftrightarrow m = 3$. **(c)**

5. Se consideră dreptele de ecuații $d_1 : mx + y = 2$ și $d_2 : x + 2y = -2$. Valoarea parametrului real m pentru care dreptele sunt paralele, este: **(7 pct.)**
a) 1; b) 2; c) $\frac{1}{2}$; d) 0; e) $-\frac{1}{2}$; f) -1 .

Soluție. Dreptele au aceeași direcție doar dacă are loc proporționalitatea coeficienților variabilelor x și y din ecuațiile dreptelor:

$$\frac{m}{1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}.$$

Observăm că $\frac{m}{1} = \frac{1}{2} \neq \frac{2}{-2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq 1$, deci cele două drepte nu coincid. Prin urmare, pentru $m = \frac{1}{2}$, dreptele sunt paralele. **(c)**

6. În $\triangle ABC$ se cunosc $AB = \sqrt{2}$, $AC = 1$ și $m(\hat{A}) = 135^\circ$. Atunci lungimea laturii BC este: (7 pct.)

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $\sqrt{3}$; c) $2\sqrt{5}$; d) $\sqrt{5}$; e) $\sqrt{2}$; f) $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Soluție. Aplicând teorema cosinusului în triunghiul ABC pentru latura BC și formula $\cos(\pi - x) = -\cos x$ pentru $x = \frac{\pi}{4}$, obținem:

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos A = \sqrt{2}^2 + 1^2 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot 1 \cdot \cos \frac{3\pi}{4} \\ &= 3 - 2\sqrt{2} \cdot \cos(\pi - \frac{\pi}{4}) = 3 + 2\sqrt{2} \cdot \cos \frac{\pi}{4} = 3 + 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 5, \end{aligned}$$

deci $BC = \sqrt{5}$. (d)

7. Într-un triunghi de arie $S = \sqrt{3}$ se cunoaște raza cercului circumscris, $R = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Notând cu a, b, c lungimile celor trei laturi, valoarea produsului $a \cdot b \cdot c$ este: (7 pct.)

a) $4\sqrt{3}$; b) 8; c) 6; d) $\frac{1}{2}$; e) $\frac{1}{8}$; f) 2.

Soluție. Aplicăm formula sinusului și formula de arie și eliminăm $\sin C$ (care este nenul); obținem

$$\begin{cases} \frac{c}{\sin C} = 2R \\ S = \frac{ab \sin C}{2} \end{cases} \Rightarrow abc = 4 \cdot R \cdot S = 4 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3} = 8. \quad \text{(b)}$$

Altfel. Folosind formula $R = \frac{abc}{4S}$, obținem $abc = 4 \cdot R \cdot S = 4 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3} = 8$.

Altfel (folosind formula sinusului și formulele de arie). Aplicând teorema sinusurilor și egalând produsele membrilor celor trei egalități, obținem

$$\begin{cases} \frac{a}{\sin A} = 2R \\ \frac{b}{\sin B} = 2R \\ \frac{c}{\sin C} = 2R \end{cases} \Rightarrow \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C = \frac{abc}{8R^3}. \quad (1)$$

Aplicând formulele de arie și egalând produsele membrilor celor trei egalități, obținem

$$\begin{cases} S = \frac{ab \sin C}{2} \\ S = \frac{bc \sin A}{2} \\ S = \frac{ca \sin B}{2} \end{cases} \Rightarrow \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C = \frac{8S^3}{(abc)^2}. \quad (2)$$

Egalând membrii dreپți ai egalităților (1) și (2) (care au același membru stâng), rezultă

$$\frac{(abc)}{8R^3} = \frac{8S^3}{(abc)^2} \Rightarrow (abc)^3 = (4 \cdot R \cdot S)^3 \Rightarrow abc = 4 \cdot R \cdot S = 4 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3} = 8.$$

Se observă că egalitatea obținută $abc = 4 \cdot R \cdot S$ reprezintă exact formula $R = \frac{abc}{4S}$.

8. Fie $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Dacă $\sin x = \frac{3}{5}$, atunci $\cos x$ este: (7 pct.)

a) 0; b) $\frac{\sqrt{3}}{5}$; c) $\frac{4}{5}$; d) $\frac{3}{5}$; e) 1; f) $-\frac{3}{5}$.

Soluție. Se observă că din condiția $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, rezultă $\cos x > 0$. Atunci, folosind această inegalitate și formula trigonometrică fundamentală $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, obținem: (7 pct.)

$$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}. \quad \text{(c)}$$

9. Centrul de greutate al triunghiului ABC de vârfuri $A(0, 3)$, $B(-1, 0)$ și $C(1, 0)$ este: (7 pct.)

a) $G(1, 1)$; b) $G(-1, 0)$; c) $G(2, 0)$; d) $G(0, -1)$; e) $G(0, 1)$; f) $G(0, 0)$.

Soluție. Coordonatele centrului de greutate sunt mediile aritmetice ale coordonatelor celor trei vârfuri: (7 pct.)

$$G(x_G, y_G) = \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \right) = \left(\frac{0 + (-1) + 1}{3}, \frac{3 + 0 + 0}{3} \right) = (0, 1). \quad \text{(e)}$$

10. Se consideră vectorii $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j}$ și $\vec{w} = 2\vec{i} + \vec{j}$. Atunci vectorul sumă $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$ este: (7 pct.)
a) \vec{i} ; b) $-2\vec{j}$; c) $4\vec{i} - \vec{j}$; d) \vec{j} ; e) $4\vec{i} + \vec{j}$; f) $2\vec{i} + \vec{j}$.

Soluție. Suma celor trei vectori se realizează sumând separat coeficienții versorilor \vec{i} și \vec{j} :

$$\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = (\vec{i} + \vec{j}) + (\vec{i} - \vec{j}) + (2\vec{i} + \vec{j}) = (1 + 1 + 2)\vec{i} + (1 + (-1) + 1)\vec{j} = 4\vec{i} + \vec{j}. \textcircled{e}$$

