**Examenul național de bacalaureat 2022**

**Proba E. c)**

**Matematică *M_mate-info***

**Varianta 1**

***Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică***
***Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică***

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

**SUBIECTUL I** **(30 de puncte)**

**5p** **1.** Arătați că $8-6\sqrt{6}+6\left(\sqrt{6}-1\right)=2$.

**5p** **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x+m$, unde $m$ este număr real. Determinați numărul real $m$ pentru care $(f\circ f)(0)=4$.

**5p** **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3\cdot 2^{2x}+4^x=4$.

**5p** **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifra zecilor divizor al numărului $6$.

**5p** **5.** În reperul cartezian $xOy$ se consideră dreapta $d$ de ecuație $y=3x-2$ și punctul $A(a,a)$, unde $a$ este număr real. Determinați numărul real $a$, știind că punctul $A$ aparține dreptei $d$.

**5p** **6.** Se consideră triunghiul isoscel $ABC$, cu $AB=10$ și $\cos A=0$. Arătați că aria triunghiului $ABC$ este egală cu $50$.

**SUBIECTUL al II-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & -x & x^2\\ 0 & 1 & -2x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, unde $x$ este număr real.

**5p** **a)** Arătați că $\det\left(A(1)\right)=1$.

**5p** **b)** Arătați că $A(x)\cdot A(y)=A(x+y)$, pentru orice numere reale $x$ și $y$.

**5p** **c)** Determinați numărul natural $n$ pentru care $A(n)\cdot A(n+1)\cdot A(n+2)\cdot A(n+3)=A\left(2n^2\right)$.

**2.** Pe mulțimea $M=[0,+\infty)$ se definește legea de compoziție $x*y=\dfrac{2x}{y+2}+\dfrac{2y}{x+2}$.

**5p** **a)** Arătați că $1*0=1$.

**5p** **b)** Arătați că $e=0$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

**5p** **c)** Determinați $x\in M$, $x$ nenul, pentru care $x*\dfrac{4}{x}=x$.

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2+\dfrac{x}{e^x-x}$.

**5p** **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{e^x(1-x)}{\left(e^x-x\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

**5p** **b)** Determinați intervalele de monotonie a funcției $f$.

**5p** **c)** Demonstrați că, pentru orice $m\in(1,2]$, ecuația $f(x)=m$ are soluție unică.

**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3-x+\sqrt{x^2+9}$.

**5p** **a)** Arătați că $\int_1^5\left(f(x)-\sqrt{x^2+9}\right)dx=0$.

**5p** **b)** Arătați că $\int_0^4\frac{x}{f(x)+x-3}dx=2$.

**5p** **c)** Pentru fiecare număr natural nenul $n$ se consideră numărul $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{f(x)}dx$. Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=0$.

**Examenul național de bacalaureat 2022**
**Proba E. c)**
**Matematică *M_mate-info***
**BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE**

**Varianta 1**

***Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică***
***Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică***

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

**SUBIECTUL I** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.** | $8-6\sqrt{6}+6\left(\sqrt{6}-1\right)=8-6\sqrt{6}+6\sqrt{6}-6=$ | **3p** |
| | $=8-6=2$ | **2p** |
| **2.** | $f(0)=m$, $(f\circ f)(0)=4m$ | **3p** |
| | $4m=4$, de unde obținem $m=1$ | **2p** |
| **3.** | $3\cdot 4^x+4^x=4$, deci $4\cdot 4^x=4$ | **3p** |
| | $x=0$ | **2p** |
| **4.** | Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile | **2p** |
| | Deoarece cifra zecilor poate fi $1$, $2$, $3$ sau $6$, în mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt $4\cdot 10=40$ de numere care au cifra zecilor divizor al numărului $6$, deci sunt 40 de cazuri favorabile, de unde obținem $p=\frac{40}{90}=\frac{4}{9}$ | **3p** |
| **5.** | $a=3a-2$ | **3p** |
| | $a=1$ | **2p** |
| **6.** | $A=\frac{\pi}{2}$ | **2p** |
| | $AC=AB\Rightarrow \mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{10\cdot 10}{2}=50$ | **3p** |

**SUBIECTUL al II-lea** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.a)** | $A(1)=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow \det\left(A(1)\right)=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=$ | **2p** |
| | $=1+0+0-0-0-0=1$ | **3p** |
| **b)** | $A(x)\cdot A(y)=\begin{pmatrix}1 & -y-x & y^2+2xy+x^2\\ 0 & 1 & -2y-2x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=$ | **3p** |
| | $=\begin{pmatrix}1 & -(x+y) & (x+y)^2\\ 0 & 1 & -2(x+y)\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=A(x+y)$, pentru orice numere reale $x$ și $y$ | **2p** |
| **c)** | $A(n)\cdot A(n+1)\cdot A(n+2)\cdot A(n+3)=A(4n+6)$, pentru orice număr natural $n$ | **3p** |
| | $4n+6=2n^2 \Leftrightarrow n^2-2n-3=0$ și, cum $n$ este număr natural, obținem $n=3$ | **2p** |
| **2.a)** | $1*0=\frac{2\cdot 1}{0+2}+\frac{2\cdot 0}{1+2}=$ | **3p** |
| | $=1+0=1$ | **2p** |

| | | |
|---|---|---|
| **b)** | $x*0=\frac{2x}{0+2}+\frac{2\cdot 0}{x+2}=x$, pentru orice $x\in M$ | **2p** |
| | $0*x=\frac{2\cdot 0}{x+2}+\frac{2x}{0+2}=x$, pentru orice $x\in M$, deci $e=0$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$” | **3p** |
| **c)** | $x*\frac{4}{x}=\frac{2x}{\frac{4}{x}+2}+\frac{\frac{8}{x}}{x+2}=\frac{x^2}{x+2}+\frac{8}{x(x+2)}=\frac{x^3+8}{x(x+2)}$, pentru orice $x\in M$, $x$ nenul | **3p** |
| | $\frac{x^3+8}{x(x+2)}=x$ și, cum $x\in M$, $x$ nenul, obținem $x=2$ | **2p** |

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.a)** | $f'(x)=\frac{e^x-x-x\left(e^x-1\right)}{\left(e^x-x\right)^2}=$ | **3p** |
| | $=\frac{e^x-xe^x}{\left(e^x-x\right)^2}=\frac{e^x(1-x)}{\left(e^x-x\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$ | **2p** |
| **b)** | $f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$; pentru orice $x\in(-\infty,1]$, $f'(x)\geq 0\Rightarrow f$ este crescătoare pe $(-\infty,1]$ | **3p** |
| | Pentru orice $x\in[1,+\infty)$, $f'(x)\leq 0\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[1,+\infty)$ | **2p** |
| **c)** | $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=1$, $f(1)=2+\frac{1}{e-1}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$ | **3p** |
| | Cum $f$ este continuă, $f$ este strict crescătoare pe $(-\infty,1)$ și $f$ este strict descrescătoare pe $(1,+\infty)$, obținem că, pentru orice $m\in(1,2]$, ecuația $f(x)=m$ are soluție unică | **2p** |
| **2.a)** | $\int_1^5\left(f(x)-\sqrt{x^2+9}\right)dx=\int_1^5(3-x)dx=\left.\left(3x-\frac{x^2}{2}\right)\right\|_1^5=$ | **3p** |
| | $=15-\frac{25}{2}-3+\frac{1}{2}=0$ | **2p** |
| **b)** | $\int_0^4\frac{x}{f(x)+x-3}dx=\int_0^4\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}dx=\int_0^4\frac{\left(x^2+9\right)'}{2\sqrt{x^2+9}}dx=\left.\sqrt{x^2+9}\right\|_0^4=$ | **3p** |
| | $=5-3=2$ | **2p** |
| **c)** | $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{f(x)}dx=\int_0^1\frac{x^n}{3-x+\sqrt{x^2+9}}dx$, pentru orice număr natural nenul $n$ | **2p** |
| | $0\leq x\leq 1\Rightarrow 3-x+\sqrt{x^2+9}\geq 3-x\geq 2\Rightarrow 0\leq\frac{x^n}{3-x+\sqrt{x^2+9}}\leq\frac{x^n}{2}$, deci $0\leq I_n\leq\frac{1}{2(n+1)}$, pentru orice număr natural nenul $n$ și, cum $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2(n+1)}=0$, obținem $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=0$ | **3p** |