Concursul MateInfoUB 2022
- 22 mai 2022 -

Problema 1. Fie $\varepsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Definim mulţimea de numere complexe

$$A = \{z \in \mathbb{C} | z \text{ are o scriere de forma } z = x + \varepsilon y, \text{ unde } x, y \in \mathbb{Z}\}.$$

(1) Demonstraţi că A este parte stabilă faţă de operaţiile de adunare şi de înmulţire a numerelor complexe.

(2) Admitem faptul că $(A, +, \cdot)$ este un inel comutativ. Notăm cu $U(A)$ mulţimea elementelor inversabile faţă de înmulţirea din inelul A. Determinaţi $U(A)$ şi demonstraţi că există numărul natural n pentru care grupurile $(U(A), \cdot)$ şi $(\mathbb{Z}_n, +)$ sunt izomorfe.

(3) Determinaţi toate numerele $p \in A$ pentru care ecuaţia $x^2 + px + 1 = 0$ are (cel puţin) o soluţie în mulţimea A.

Problema 2. Fie funcţia $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ dată prin

$$f(x) = \frac{\sqrt{[x]} + \sqrt{\{x\}}}{\sqrt{x}},$$

unde $[x]$ este partea întreagă a numărului real x, iar $\{x\} = x - [x]$ este partea fracţionară a numărului real x.

(1) Demonstraţi că f este crescătoare pe intervalul $[k, k+1)$ pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$.

(2) Determinaţi $\operatorname{Im}(f)$, adică mulţimea valorilor lui f. Determinaţi apoi valorile lui $\lambda \in \mathbb{R}$ pentru care mulţimea A_λ are exact 2022 elemente, unde

$$A_\lambda = \{x \in \mathbb{R} | \ f(x) = \lambda\}.$$

(3) Demonstraţi că funcţia f este integrabilă pe orice interval de forma $[n, n+1]$ cu $n \in \mathbb{N}^*$. Arătaţi apoi că şirul $(I_n)_{n\geq 1}$ definit prin $I_n = \int\limits_n^{n+1} f(x)dx$ este convergent şi determinaţi limita acestuia.

Subiectele continuă şi pe verso!

Problema 3. Fie $ABCD$ un patrulater convex.

(1) Dacă M, N, P, Q sunt mijloacele laturilor AB, BC, CD, respectiv DA, iar O este un punct interior patrulaterului, demonstraţi că

$$A_{OMBN} + A_{OPDQ} = A_{ONCP} + A_{OQAM}$$

şi

$$P_{OMBN} + P_{OPDQ} = P_{ONCP} + P_{OQAM},$$

unde A_{XYZW}, P_{XYZW} reprezintă aria, respectiv perimetrul patrulaterului $XYZW$.

(2) Fie punctele E, F, G şi H situate pe laturile AB, BC, CD, respectiv DA ale patrulaterului astfel ca:

$$\frac{AE}{EB} = \frac{BF}{FC} = \frac{CG}{GD} = \frac{DH}{HA} = \frac{1}{2}.$$

Presupunem că există un punct Z în interiorul patrulaterului, astfel încât

$$P_{ZEBF} + P_{ZGDH} = P_{ZFCG} + P_{ZHAE}.$$

Arătaţi că există un punct T în interiorul patrulaterului $ABCD$, astfel încât

$$(*) \quad P_{TEBF} + P_{TGDH} = P_{TFCG} + P_{THAE}$$

şi

$$(\circ) \quad A_{TEBF} + A_{TGDH} = A_{TFCG} + A_{THAE}.$$

(3) Cu ipotezele şi notaţiile de la punctul (2) presupunem, în plus, că patrulaterul $ABCD$ nu este romb. Demonstraţi că nu există trei puncte necoliniare T_1, T_2, T_3, ce îndeplinesc relaţiile $(*)$ şi $(\circ)$.

Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 3 ore.