Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Varianta 3

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $(1{,}5-0{,}5)\cdot 3-2\cdot 0{,}5=2$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-3$. Determinați numărul real a pentru care $f(a)=9$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_4(3x-1)=\log_4 5$.

5p **4.** Determinați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea $A=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, acesta să verifice inegalitatea $5n\le 22$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-2,1)$ și $B(6,3)$. Determinați coordonatele mijlocului segmentului AB.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu $AC=4$ și $BC=5$. Arătați că aria triunghiului ABC este egală cu 6.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ și $B(x)=\begin{pmatrix}2-x & x\\ x & 2\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det A=5$.

5p **b)** Arătați că $2A-B(2)=2B(0)$.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $\det\big(B(x)\cdot B(1)-(x+1)A\big)=1$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=x+y-6xy$.

5p **a)** Arătați că $1\circ 1=-4$.

5p **b)** Arătați că $e=0$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”.

5p **c)** Determinați numerele întregi m pentru care $m\circ(3-m)<3$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^3-3x^4+2$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=6x^2(1-2x)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)+3x^4}{x^3+4}=2$.

5p **c)** Demonstrați că $-32\le 2x^3-3x^4\le\dfrac{1}{16}$, pentru orice $x\in[0,2]$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+3e^x$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_2^3\big(f(x)-3e^x\big)\,dx=5$.

5p **b)** Arătați că $\displaystyle\int_0^1 x\big(f(x)-2x\big)\,dx=3$.

5p **c)** Determinați numărul real a, știind că $\displaystyle\int_0^1\frac{f'(x)-x}{2f(x)-x^2}\,dx=a\ln\left(e+\frac{1}{2}\right)$.

Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 3

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$(1,5-0,5)\cdot 3-2\cdot 0,5=1\cdot 3-1=$	**3p**
	$=3-1=2$	**2p**
2.	$f(a)=2a-3$	**2p**
	$2a-3=9$, de unde obținem $a=6$	**3p**
3.	$3x-1=5$	**3p**
	$x=2$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea A are 10 elemente, deci sunt 10 cazuri posibile	**2p**
	Numerele n din mulțimea A pentru care $5n\le 22$ sunt 0, 1, 2, 3 și 4, deci sunt 5 cazuri favorabile, de unde obținem $p=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$	**3p**
5.	$x_M=\frac{-2+6}{2}$, $y_M=\frac{1+3}{2}$, unde M este mijlocul segmentului AB	**3p**
	$x_M=2$, $y_M=2$	**2p**
6.	$AB=3$	**2p**
	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{AB\cdot AC}{2}=\frac{3\cdot 4}{2}=6$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=2\cdot 3-1\cdot 1=$	**3p**
	$=6-1=5$	**2p**
b)	$2A-B(2)=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 2 & 6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=2\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=2B(0)$	**2p**
c)	$B(1)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow B(x)\cdot B(1)-(x+1)A=\begin{pmatrix}2 & x+2\\ x+2 & x+4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2x+2 & x+1\\ x+1 & 3x+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2x & 1\\ 1 & 1-2x\end{pmatrix}$ și $\det\left(B(x)\cdot B(1)-(x+1)A\right)=4x^2-2x-1$, pentru orice număr real x	**3p**
	$4x^2-2x-1=1\Leftrightarrow 2x^2-x-1=0$, de unde obținem $x=-\frac{1}{2}$ sau $x=1$	**2p**
2.a)	$1\circ 1=1+1-6\cdot 1\cdot 1=$	**3p**
	$=2-6=-4$	**2p**
b)	$0\circ x=0+x-6\cdot 0\cdot x=0+x-0=x$, pentru orice număr real x	**2p**
	$x\circ 0=x+0-6\cdot x\cdot 0=x+0-0=x$, pentru orice număr real x, deci $e=0$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”	**3p**

c)	$m\circ(3-m)=3-6m(3-m)$, pentru orice număr întreg m	**2p**
	$3-6m(3-m)<3 \Leftrightarrow m(m-3)<0$ și, cum m este număr întreg, obținem $m=1$ și $m=2$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=2\cdot 3x^2-3\cdot 4x^3=$	**3p**
	$=6x^2-12x^3=6x^2(1-2x)$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)+3x^4}{x^3+4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3+2}{x^3+4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3\left(2+\frac{2}{x^3}\right)}{x^3\left(1+\frac{4}{x^3}\right)}=$	**2p**
	$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2+\frac{2}{x^3}}{1+\frac{4}{x^3}}=2$	**3p**
c)	$f'(x)=0\Rightarrow x=0$ sau $x=\frac{1}{2}$; $f'(x)\ge 0$, pentru orice $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]\Rightarrow f$ este crescătoare pe $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ și $f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in\left[\frac{1}{2},2\right]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $\left[\frac{1}{2},2\right]$	**2p**
	$f(0)=2$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{33}{16}$ și $f(2)=-30$, deci $-30\le f(x)\le\frac{33}{16}$, pentru orice $x\in[0,2]$, de unde obținem $-32\le 2x^3-3x^4\le\frac{1}{16}$, pentru orice $x\in[0,2]$	**3p**
2.a)	$\int_2^3\left(f(x)-3e^x\right)dx=\int_2^3 2x\,dx=x^2\Big\vert_2^3=$	**3p**
	$=9-4=5$	**2p**
b)	$\int_0^1 x\left(f(x)-2x\right)dx=\int_0^1 3xe^x dx=3xe^x\Big\vert_0^1-3e^x\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=3e-0-3e+3=3$	**2p**
c)	$\int_0^1\dfrac{f'(x)-x}{2f(x)-x^2}dx=\dfrac{1}{2}\int_0^1\dfrac{\left(2f(x)-x^2\right)'}{2f(x)-x^2}dx=\dfrac{1}{2}\ln\left\vert 2f(x)-x^2\right\vert\Big\vert_0^1=\dfrac{1}{2}\ln\left(e+\dfrac{1}{2}\right)$	**3p**
	$\dfrac{1}{2}\ln\left(e+\dfrac{1}{2}\right)=a\ln\left(e+\dfrac{1}{2}\right)$, de unde obținem $a=\dfrac{1}{2}$	**2p**